

CONVERGENCE DES SCHÉMAS DE SUBDIVISION D'HERMITE AU SENS DES DISTRIBUTIONS

SERGE DUBUC ET JEAN-LOUIS MERRIEN

RÉSUMÉ. Nous définissons la notion de convergence dans l'espace des distributions pour des schémas d'Hermite construits par subdivision. À tout schéma convergent au sens des distributions est associée une distribution matricielle de base. Sauf exception, les lignes de cette distribution sont des multiples de la première ligne. Puis, nous proposons des conditions nécessaires ou suffisantes pour obtenir la convergence en distribution des schémas d'Hermite. L'outil de l'analyse est la transformation de Fourier d'une distribution matricielle, dès qu'elle est définie. L'étude d'un produit infini de matrices est un élément clé de l'analyse.

ABSTRACT. We define the notion of convergence in distribution for Hermite subdivision schemes. A given Hermite subdivision scheme is convergent iff a basic matrix distribution M exists. Generally, the rows of M are multiples of its first row. Moreover we find necessary or sufficient conditions for this type of convergence for arbitrary Hermite subdivision schemes. This is done through the Fourier transform of a matrix distribution if it exists. Infinite matrix products are critical for completing the analysis.

1. Introduction. Nous définissons un schéma de subdivision de type Hermite, noté SSH, d'ordre r en construisant une fonction f et ses r premières dérivées par récurrence. L'ensemble initial de données discrètes est un ensemble de vecteurs de contrôle $\{f_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{r+1}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, la première composante du vecteur $f_0(\alpha)$ est la valeur de contrôle de f en $x = \alpha$; les autres r composantes sont les valeurs de contrôle pour les r dérivées successives de f . La suite des raffinements $f_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$, $n > 0$, pour approcher f et ses dérivées est définie par récurrence à l'aide d'un ensemble de matrices carrées à coefficients réels d'ordre $r + 1$, $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ par la formule

$$D^{n+1}f_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} D^n f_n(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

où D est la matrice diagonale de dimension $r + 1$ dont la diagonale est composée des puissances successives de $1/2$, soit $1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^r$. Nous supposons aussi que les matrices $\{A_\alpha\}$ ne diffèrent de 0 que pour un ensemble fini d'indices. Le vecteur $f_n(\alpha)$ est relié au point dyadique $\alpha/2^n$ à la profondeur n de la subdivision. La justification

Reçu le 15 février 2005 et, sous forme définitive, le 23 mai 2005.

de la formule ci-dessus n'est pas immédiate ; elle est liée à la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{d^j}{dx^j}[f(x/2^n)] = \left[\frac{d^j f}{dx^j}(x/2^n)\right]/2^{jn}, \quad j = 1, \dots, r,$$

qui introduit les facteurs $1/2^{jn}$ que l'on retrouve ensuite dans la matrice diagonale D^n . Un certain nombre d'exemples classiques ont conduit à cette formulation. Des exemples de SSH d'ordre 1 ou 2 sont aussi proposés par Merrien [8,20,21], Dyn et Levin [9]. Chronologiquement, la première étude des schémas de subdivision de type Hermite d'ordre r quelconque a été faite par Dyn et Levin [10]. Ils ont proposé la théorie et les outils pour étudier la convergence et la régularité d'un schéma d'Hermite interpolant. Zhou [28] et Han [13,14] ont aussi contribué au thème des subdivisions d'Hermite.

Nous introduisons maintenant la convergence au sens des distributions.

Définition 1. Soit f_0 une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{R}^{r+1} . Si f_n est la suite des vecteurs de contrôle d'un SSH, ce schéma *converge au sens des distributions pour la donnée* f_0 si, pour toute fonction C^∞ à support compact, $\varphi(x), x \in \mathbb{R}$, la suite de vecteurs $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \varphi(\alpha/2^n) f_n(\alpha)/2^n$ converge. Le schéma est *\mathcal{D}' -convergent* s'il converge au sens des distributions pour toute valeur initiale $f_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}$.

L'objectif de l'étude proposée est la convergence au sens des distributions des SSH. Dans la partie 2, nous listons les principales propriétés algébriques de ces schémas. Dans la partie 3, nous proposons un exemple de SSH d'ordre r en reprenant le problème classique de l'interpolation d'Hermite à partir de données en 2 points. Dans la partie 4, nous étudions la convergence au sens des distributions et nous montrons en particulier qu'un SSH est \mathcal{D}' -convergent si et seulement si une distribution matricielle de base M existe. La partie 5 permet de développer les propriétés importantes de cette distribution matricielle. La transformation de Fourier de M est l'outil adapté à cette analyse. Dans la partie 6, nous relierons les deux notions d'équations de raffinement et de SSH. La partie 7 traite de produits infinis de matrices convergents qui sont les outils nous permettant de proposer dans la partie 8 une condition suffisante de convergence au sens des distributions ; dans le cas particulier de l'ordre 1, cette condition est très générale. La partie 9 permet d'illustrer les résultats précédents à travers une série d'exemples.

La théorie des distributions a déjà beaucoup été utilisée pour l'étude des équations de raffinement, citons par exemple Daubechies et Lagarias [5], Heil et Colella [15], Cohen, Daubechies et Plonka [3] ou encore Zhou [27], Jia, Riemenschneider et Zhou [19]. Cette théorie est aussi très utile pour l'analyse multirésolution comme l'a montré Hervé [17]. Ajoutons que Derfel, Dyn et Levin [6] ont considéré la convergence au sens des distributions de procédés de subdivision pour des intégrales de Stieljies. Dans nos propres contributions, nous avons déjà étudié la convergence au sens des distributions pour des schémas d'ordre 1 ou 2 dans deux articles précédents [7,8]. Mais on peut trouver encore beaucoup d'exemples d'études de convergence au sens des distributions.

Dans cet article, pour certains lecteurs qui ne sont pas forcément familiers de la théorie des distributions, nous avons proposé une ou deux références chaque fois qu'un théorème concernait le sujet. Notons aussi que nous utilisons la notation de Kronecker δ_{jk} définie par $\delta_{jj} = 1$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$ ainsi que l'habituelle notation de la

distribution de Dirac δ_a au point a . Le contexte permet d'éviter toute confusion entre les deux.

2. Propriétés algébriques des schémas d'Hermité. Dans cette partie, nous définissons les schémas de subdivision de type Hermite définis sur \mathbb{R} et nous en donnons les principales propriétés algébriques. En préalable, nous rappelons la définition de schéma de subdivision vectoriel proposée par Cohen, Dyn et Levin [2] en pointant quelques résultats algébriques.

Définition 2. Un *masque* est un ensemble de matrices $r \times r$, $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$, un nombre fini d'entre elles étant non nulles. Le *support* du masque est l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{Z} : A_\alpha \neq 0\}$.

En définissant l'espace vectoriel $V_r = \{g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^r\}$, nous avons

Définition 3. Soient $\{A_\alpha\} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ un masque et les données initiales $g_0 \in V_r$, le *schéma de subdivision vectoriel de dimension r* construit la suite g_n d'éléments de V_r par récurrence en utilisant la formule

$$g_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} g_n(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

g_n est appelé le n -ième *raffinement* de g_0 .

Définition 4. La *suite des fonctions matricielles de base* d'un schéma de subdivision vectoriel, $G_n, G_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^{r \times r}$, est définie par récurrence par

$$G_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} G_n(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

avec comme valeur initiale $G_0(\alpha) = \delta_{0\alpha} I$, où I est la matrice identité d'ordre r .

Remarque 1. $G_1(\alpha) = A_\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}$.

Les deux lemmes ci-dessous sont de simples exercices de récurrence.

Lemme 1. Si le support du masque est inclus dans $[N', N]$, alors $G_n(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \notin [(2^n - 1)N', (2^n - 1)N]$.

Démonstration. Le lemme est évidemment vrai pour $n = 0$. Nous utilisons une récurrence et un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$ tels que

- 1) $(\forall \beta \notin [(2^n - 1)N', (2^n - 1)N]), \quad G_n(\beta) = 0;$
- 2) $(\exists \alpha \notin [(2^{n+1} - 1)N', (2^{n+1} - 1)N]), \quad G_{n+1}(\alpha) \neq 0.$

En utilisant (2), il existe alors $\beta \in \mathbb{Z}$ tel que $A_{\alpha-2\beta} \neq 0$ et $G_n(\beta) \neq 0$. Si bien que $N' \leq \alpha - 2\beta \leq N$ et $(2^n - 1)N' \leq \beta \leq (2^n - 1)N$. Il vient alors $(2^{n+1} - 1)N' \leq \alpha \leq (2^{n+1} - 1)N$. Ce dernier résultat est en contradiction avec la propriété (2). \square

Lemme 2. Si $g_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^r, n \geq 0$ est une suite construite par un schéma de subdivision vectoriel, alors

$$g_n(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} G_n(\alpha - 2^n \beta) g_0(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Démonstration. Le résultat est obtenu par récurrence en utilisant (1) et (2). \square

Remarque 2. En utilisant le lemme 1, on constate que la série obtenue dans (3) est en fait une somme finie.

Théorème 3. *Pour tout n et n' dans \mathbb{N} et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, nous avons*

$$G_{n+n'}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} G_n(\alpha - 2^n \beta) G_{n'}(\beta). \quad (4)$$

Démonstration. Choisissons un entier $j \in [1, r]$, nous partons des données initiales $g_0(\beta)$, ce vecteur étant la j -ième colonne de $G_{n'}(\beta)$ construit par (2). Alors pour tout α de \mathbb{Z} , $g_n(\alpha)$ est la j -ième colonne de $G_{n+n'}(\alpha)$. D'après le lemme 2, $g_n(\alpha)$ apparaît comme la j -ième colonne de la partie droite de (4). \square

Définissons maintenant la notion de SSH d'ordre r , $r > 0$, sur \mathbb{R} . Nous utiliserons fréquemment la matrice diagonale D dont les éléments diagonaux successifs sont $1/2^j$, $j = 0, 1, \dots, r$. Nous aurons aussi besoin d'un important opérateur de V_{r+1} , qui transforme un élément $f \in V_{r+1}$ en $g \in V_{r+1}$ en utilisant la formule $g(\alpha) = Df(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Sans risque de confusion, nous noterons aussi D cet opérateur.

Définition 5. Un schéma de subdivision d'Hermite, SSH, d'ordre r est un schéma qui engendre une suite de raffinements $f_n \in V_{r+1}$ tels que $g_n = D^n f_n$, où les g_n sont les raffinements dans le schéma de subdivision vectoriel de dimension $r+1$ avec le masque A_α .

$$\begin{array}{ccccccc} f_0 & \longrightarrow & f_1 & \longrightarrow & f_2 & \longrightarrow & f_3 \\ \downarrow I & & \downarrow D & & \downarrow D^2 & & \downarrow D^3 \\ g_0 & \longrightarrow & g_1 & \longrightarrow & g_2 & \longrightarrow & g_3 \end{array}$$

Schéma vectoriel et schéma d'Hermite

À partir de cette définition, les raffinements d'un SSH sont donnés par récurrence comme suit

$$D^{n+1} f_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} D^n f_n(\beta), \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Définition 6. La suite de fonctions matricielles de base d'un SSH d'ordre r est la suite de fonctions matricielles $F_n, F_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^{(r+1) \times (r+1)}$, définie par récurrence par

$$D^{n+1} F_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} D^n F_n(\beta), \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

avec comme valeur initiale $F_0(\alpha) = \delta_{0\alpha} I$, où I est la matrice identité d'ordre $r+1$.

Remarque 3. Notons le lien étroit entre la première fonction matricielle, F_1 et le masque d'un SSH puisque $A_\alpha = DF_1(\alpha)$.

Nous pouvons aussi facilement transformer les lemmes 1 et 2 ainsi que le théorème 3 pour un schéma d'Hermite et obtenir ainsi les trois résultats suivants.

Lemme 4. Si le support du masque est contenu dans $[N', N]$, alors $F_n(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \notin [(2^n - 1)N', (2^n - 1)N]$.

Lemme 5. Si les f_n forment la suite des raffinements d'un SSH, alors

$$f_n(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} F_n(\alpha - 2^n \beta) f_0(\beta), \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 6. Pour tout n et n' dans \mathbb{N} et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$D^{n+n'} F_{n+n'}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} D^n F_n(\alpha - 2^n \beta) D^{n'} F_{n'}(\beta).$$

En choisissant $n' = 1$ dans le théorème précédent et en utilisant la remarque 3, il vient

$$D^{n+1} F_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} D^n F_n(\alpha - 2^n \beta) A_\beta, \alpha \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

3. Polynômes d'Hermite et schémas d'Hermite. Dans cette partie, nous proposons un exemple de SSH d'ordre quelconque réalisant l'interpolation. Nous le construisons à partir de l'interpolation d'Hermite polynômiale par morceaux classique.

Définition 7. Un SSH est *interpolant* si $A_0 = D$ et $(\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \neq 0), A_{2\alpha} = 0$.

Pour tout entier $r > 0$ donné, nous introduisons deux familles de $r + 1$ polynômes $u_0(x), u_1(x), \dots, u_r(x)$ et $v_0(x), v_1(x), \dots, v_r(x)$. Pour tout entier $k = 0, \dots, r$, $u_k(x)$ est l'unique polynôme de degré $2r + 1$ satisfaisant le problème d'Hermite

$$u_k^{(j)}(0) = \frac{d^j u_k}{dx^j}(0) = \delta_{jk}, \quad u_k^{(j)}(1) = \frac{d^j u_k}{dx^j}(1) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

En utilisant les formules d'Obreshkov (voir par exemple la contribution de Sendov et Andrew [25]),

$$u_k(x) = \sum_{j=0}^{r-k} \binom{r+j}{j} x^{j+k} (1-x)^{r+1} / k!.$$

Nous définissons alors $v_k(x) = (-1)^k u_k(1-x)$. Notons que ce polynôme est l'unique polynôme de degré $2r + 1$ solution du problème d'Hermite

$$v_k^{(j)}(0) = 0, \quad v_k^{(j)}(1) = \delta_{jk}, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

Si a et b sont deux réels distincts, alors pour tout polynôme p de degré $\leq 2r + 1$,

$$(b-a)^j p^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^r [(b-a)^k p^{(k)}(a) u_k^{(j)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) + (b-a)^k p^{(k)}(b) v_k^{(j)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)] \quad (8)$$

pour $j = 0, 1, \dots, r$.

Nous supposons que les valeurs initiales sur \mathbb{Z} d'une fonction $f = f^{(0)}$ et de ses r premières dérivées $f^{(j)}, j = 1, \dots, r$ sont données par une suite de vecteurs $(y_0(\alpha), y_1(\alpha), \dots, y_r(\alpha)), \alpha \in \mathbb{Z}$. La fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{k=0}^r y_k(\alpha) u_k(x - \alpha) + y_k(\alpha + 1) v_k(x - \alpha), \text{ si } \alpha \leq x \leq \alpha + 1, \alpha \in \mathbb{Z}$$

est alors polynomiale par morceaux et de classe C^r sur \mathbb{R} ; elle remplit les conditions d'interpolation d'Hermite

$$f^{(j)}(\alpha) = y_j(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad j = 0, 1, \dots, r.$$

Dans (8), nous choisissons $a = \alpha/2^n, b = (\alpha + 1)/2^n, x = (a + b)/2, p = f$. Nous obtenons alors la valeur

$$f^{(j)}\left(\frac{2\alpha + 1}{2^{n+1}}\right)/2^{(n+1)j} = \sum_{k=0}^r u_k^{(j)}(1/2) [f^{(k)}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)/2^{nk} + (-1)^{j+k} f^{(k)}\left(\frac{\alpha + 1}{2^n}\right)/2^{nk}] / 2^j,$$

pour tout entier $\alpha \in \mathbb{Z}$ et pour tout $j = 0, 1, \dots, r$.

Construisons maintenant les matrices d'ordre $r + 1$

$$A_1 = D \begin{pmatrix} u_0(1/2) & u_1(1/2) & \cdot & u_r(1/2) \\ u'_0(1/2) & u'_1(1/2) & \cdot & u'_r(1/2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_0^{(r)}(1/2) & u_1^{(r)}(1/2) & \cdot & u_r^{(r)}(1/2) \end{pmatrix}, \quad A_0 = D$$

$$A_{-1} = D \begin{pmatrix} u_0(1/2) & -u_1(1/2) & \cdot & (-1)^r u_r(1/2) \\ -u'_0(1/2) & u'_1(1/2) & \cdot & (-1)^{r+1} u'_r(1/2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^r u_0^{(r)}(1/2) & (-1)^{r+1} u_1^{(r)}(1/2) & \cdot & (-1)^{2r} u_r^{(r)}(1/2) \end{pmatrix}$$

et $A_{\pm 2} = 0, A_{\pm 3}, A_{\pm 4} = 0, \dots$

Si $f_n(\alpha) = (f(\alpha/2^n), f'(\alpha/2^n), \dots, f^{(r)}(\alpha/2^n))^T$, alors à la profondeur suivante,

$$D^{n+1} f_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} D^n f_n(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous avons ainsi un exemple de SSH. Par construction, il est interpolant.

Pour $r = 1, 2, 3$, précisons les valeurs successives des matrices A_{-1} du masque :

$$\text{Diag}(0, 1/2) \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ 3/2 & -1/4 \end{pmatrix}, \quad \text{Diag}(0, 1/2, 1/4) \begin{pmatrix} 1/2 & -5/32 & 1/64 \\ 15/8 & -7/16 & 1/32 \\ 0 & 3/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \text{Diag}(0, 1/2, 1/4, 1/8) \begin{pmatrix} 1/2 & -11/64 & 3/128 & -1/768 \\ 35/16 & -19/32 & 1/16 & -1/384 \\ 0 & 15/8 & -7/16 & 1/32 \\ -105/2 & 105/4 & -15/4 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que le cas particulier de $r = 1$ et $r = 2$ a déjà été étudié par Merrien [20,21].

4. Schéma de subdivision d’Hermite convergent. Dans cette partie, nous précisons la notion de convergence au sens des distributions pour un SSH, puis nous montrons qu’en ce sens, la convergence est obtenue si et seulement si la suite des distributions matricielles de base converge. Notons que plusieurs définitions de convergence d’un schéma vectoriel ont été proposées. La première a sans doute été proposée par Cavaretta, Dahmen et Micchelli [1], tandis qu’une autre définition est donnée dans Cohen, Dyn et Levin [2]. Pour des SSH, Dyn et Levin [10] définissent la notion de convergence seulement pour les schémas interpolants. Pour avoir une définition concernant aussi les schémas non interpolants, nous modifions leur définition comme suit :

Définition 8. Soit f_n une suite de raffinements pour un SSH d’ordre r initialisée par les données $f_0 \in V_{r+1}$. Le schéma est C^s -convergent, $s \geq r$ pour f_0 s’il existe une fonction $f \in C^s(\mathbb{R})$ telle que la suite de fonctions vectorielles $L_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$ converge vers la fonction vectorielle $(f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x))^T$, L_n étant la fonction vectorielle affine par morceaux définie par

$$L_n(x) = (\alpha + 1 - 2^n x)f_n(\alpha) + (2^n x - \alpha)f_n(\alpha + 1),$$

où α est le plus grand entier plus petit ou égal à $2^n x$. Nous imposons aussi que la convergence soit uniforme sur tout intervalle fini. Le schéma est C^s -convergent s’il est C^s -convergent pour toute valeur initiale f_0 .

Le SSH d’ordre r du paragraphe 3 est C^r -convergent. Pour $r = 1$ et $r = 2$, la convergence C^r des schémas symétriques à 2 points a été étudiée par Merrien [20,21]. Dans certains cas, il a retrouvé des polynômes interpolants ou des polynômes par morceaux interpolants usuels (splines) comme limite des f_n ; dans ces cas, la convergence C^r est évidente. Des détails sur ces schémas seront donnés au paragraphe 9.

Avant d’introduire la notion de convergence au sens des distributions, nous rappelons quelques notations de la théorie des distributions de Schwartz. Tout d’abord, \mathcal{D} est l’espace des fonctions de classe C^∞ définie sur \mathbb{R} et à support borné. \mathcal{D}' est alors l’espace des distributions sur \mathbb{R} , c’est-à-dire l’espace des fonctionnelles linéaires continues définies sur l’espace test \mathcal{D} . La distribution de Dirac (mesure) δ_h au point $h \in \mathbb{R}$ est définie par $\delta_h(\varphi) = \varphi(h)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$. Nous utiliserons aussi la notation de Schwartz pour l’opérateur de translation τ_h , où h est un réel. Si φ est une fonction de \mathcal{D} et si T est une distribution, alors $\tau_h \varphi(x) = \varphi(x - h)$ et $\tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h} \varphi)$.

Définition 9. Si f_n désigne une suite de raffinements pour un SSH, le schéma converge au sens des distributions pour des données initiales $f_0 \in V_{r+1}$ si la suite des distributions vectorielles $T_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha) / 2^n \delta_{\alpha/2^n}$ converge dans l’espace $[\mathcal{D}']^{r+1}$ vers une distribution vectorielle.

Exemple 1. Considérons un schéma d’Hermite d’ordre r de masque $\{A_\alpha\}$. L’élément de la j -ème ligne et de la k -ième colonne de A_α est notée $a_{jk}(\alpha)$ et nous supposons que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{00}(\alpha) = 2 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{j0}(\alpha) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, r.$$

Comme donnée initiale, nous prenons la fonction vectorielle f_0 définie par $(\forall \alpha \in \mathbb{Z}), f_0(\alpha) = (1, 0, 0, \dots, 0)^T$. À partir de ces hypothèses, nous obtenons que la suite

des raffinements f_n vérifie $f_n = 2^n f_0$. Si

$$T_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha) / 2^n \delta_{\alpha/2^n},$$

alors la suite T_n converge quand $n \rightarrow \infty$. La première composante de la distribution vectorielle limite est la mesure de Lebesgue sur l'axe réel, les autres composantes de la limite sont nulles.

Définition 10. Le schéma est \mathcal{D}' -convergent s'il converge au sens des distributions pour toute donnée initiale $f_0 \in V_{r+1}$.

On constate évidemment que la convergence en distribution est beaucoup plus facile à obtenir que la convergence C^s . Dans l'introduction, nous avons proposé une autre définition de la convergence au sens des distributions, mais en fait, les deux définitions sont équivalentes en utilisant le théorème suivant (voir Schwartz [24], t.1, p.74 ou Horváth [18], p.315).

Théorème 7 (Schwartz). *Si une suite de distributions T_n est telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, la suite $T_n(\varphi)$ a une limite $T(\varphi)$, alors T est une distribution et la suite T_n converge fortement vers T .*

Définition 11. La suite de distributions matricielles de base d'un SSH est la suite

$$M_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} F_n(\alpha) / 2^n \delta_{\alpha/2^n},$$

où F_n désigne la suite de fonctions matricielles de base de la définition 6. Si la suite des distributions matricielles converge vers une distribution matricielle M , alors M est appelée *distribution matricielle de base*.

Théorème 8. *Si la distribution matricielle de base M existe pour un SSH, alors ce schéma est \mathcal{D}' -convergent. Plus précisément, si f_n est la suite de raffinements du schéma à partir des données initiales f_0 , alors la suite de distributions vectorielles $T_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha) / 2^n \delta_{\alpha/2^n}$ converge dans l'espace des distributions \mathcal{D}' vers la distribution vectorielle*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} [\tau_\alpha M] f_0(\alpha).$$

Réciproquement, si le SSH est \mathcal{D}' -convergent, alors la distribution matricielle de base existe.

Démonstration. Pour la première partie du théorème, supposons que la distribution matricielle de base M existe. D'après le lemme 4, il existe un entier N tel que le support de toutes les distributions matricielles M_n soit contenu dans $[-N, N]$; si bien que la même propriété est vraie pour M . Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec un support contenu dans

$[-N', N']$, alors $T_n(\varphi) = \sum_{\alpha=-N'2^n}^{N'2^n} \varphi(\alpha/2^n) f_n(\alpha)/2^n$. D'après le lemme 5,

$$\begin{aligned} T_n(\varphi) &= \sum_{\alpha=-N'2^n}^{N'2^n} \sum_{\beta=\alpha/2^n-N}^{\alpha/2^n+N} \varphi(\alpha/2^n) F_n(\alpha - 2^n \beta) f_0(\beta)/2^n \\ &= \sum_{\beta=-N-N'}^{N+N'} \sum_{\alpha=-N2^n}^{N2^n} \varphi(\alpha/2^n + \beta) F_n(\alpha) f_0(\beta)/2^n \\ &= \sum_{\beta=-N-N'}^{N+N'} [\tau_\beta M_n](\varphi) f_0(\beta). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\varphi) = \sum_{\beta=-N-N'}^{N+N'} [\tau_\beta M](\varphi) f_0(\beta);$$

ce qui donne la première conclusion.

Pour la seconde partie, nous supposons seulement que le schéma d'Hermité est \mathcal{D}' -convergent. Pour $j = 0, 1, \dots, r$, nous considérons la donnée initiale f_0 avec $f_0(0) = e_j$ (la j -ième composante de e_j est 1, les autres 0) et pour tout $\alpha \neq 0$, $f_0(\alpha) = 0$.

La suite de distributions vectorielles $T_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha)/2^n \delta_{\alpha/2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ converge dans \mathcal{D}'^{r+1} vers $T^{(j)}$. Comme T_n est la j -ième colonne de la matrice M_n , cette suite de base converge vers la distribution matricielle $M = (T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(r)})$. \square

5. Propriétés de la distribution matricielle de base. Dans cette partie, nous étudions la distribution matricielle de base M pour un SSH \mathcal{D}' -convergent. Le principal outil de cette étude est la transformée de Fourier. Précisément, le lemme clé donne une formule pour la transformée de Fourier $\hat{M}_n(\xi)$ de la suite de distributions matricielles de base M_n ; \hat{M}_n apparaît comme un produit explicite de matrices. Nous montrons aussi que la transformée de Fourier de M est solution d'une équation fonctionnelle simple. En conséquence, la plupart des SSH \mathcal{D}' -convergent ont une distribution matricielle de base avec une structure très simple : la j -ième ligne de M est le produit d'un réel par la j -ième dérivée de la première ligne de M .

Mais tout d'abord, nous rappelons la définition de la transformée de Fourier d'une distribution telle qu'elle est proposée par Schwartz [24,23]. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction \hat{f} définie par

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

L'espace \mathcal{S} des fonctions à *décroissance rapide* est formé des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que pour $j = 0, 1, 2, \dots$ et $k = 0, 1, 2, \dots$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \varphi^{(j)}(x)| < \infty$.

On introduit dans \mathcal{S} une topologie : une suite $\varphi_n \in \mathcal{S}$ converge vers 0 si pour $j = 0, 1, 2, \dots$ et $k = 0, 1, 2, \dots$, chaque suite de fonctions $x^k \varphi_n^{(j)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ converge

vers 0 uniformément dans \mathbb{R} . Maintenant que \mathcal{S} est munie d'une topologie, on définit la notion de *distribution tempérée* comme une fonctionnelle linéaire continue définie sur \mathcal{S} . La *transformée de Fourier* d'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'$ est la distribution tempérée $\hat{T} \in \mathcal{S}'$ définie par

$$\hat{T}(\varphi) = T(\hat{\varphi}). \quad (9)$$

Si T est une distribution à support contenu dans $[-N, N]$, alors pour toute fonction de classe C^∞ , nous pouvons définir $T(\varphi)$. Il suffit en effet d'introduire une fonction auxiliaire $\alpha \in \mathcal{D}$ telle que $\alpha(x) = 1$ pour $x \in [-N - 1, N + 1]$ et de calculer ensuite $T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$. Notons qu'il n'y pas d'ambiguïté dans cette définition, car deux choix différents α_1, α_2 pour α donne ensuite la même valeur $T(\alpha_1\varphi) = T(\alpha_2\varphi)$ (voir [24] p.87 t.1 ou [23] p.164, Théorème 6.24 (a)). Nous voyons ainsi que T peut être prolongée par continuité à \mathcal{S} ; on peut alors la considérer comme une distribution tempérée et la transformée de Fourier de T peut à nouveau être définie par (9).

Mais quand T est une distribution à support borné, une définition encore plus simple de la transformée de Fourier de T peut être proposée :

$$\hat{T}(\xi) = T(e^{-i\xi x}) \quad (10)$$

comme le précise Rudin [23], p.199. L'avantage de cette formule est qu'elle n'utilise pas l'espace \mathcal{S} . Dans (10), on peut même étendre la transformée de Fourier à \mathbb{C} en prenant simplement $\xi \in \mathbb{C}$ dans la formule. Cette extension est appelée *transformée de Fourier-Laplace* de T .

Définition 12. Le symbole d'un SSH de masque A_α est

$$B(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} A_\alpha e^{-i\alpha\xi}/2.$$

L'élément en position (j, k) de $B(\xi)$ sera noté $b_{jk}(\xi)$.

Lemme 9. Si M_n désigne la suite des distributions matricielles de base d'un SSH dont le symbole est $B(\xi)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{M}_n(\xi) = D^{-n} B(\xi/2^n) B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4) B(\xi/2) \quad (11)$$

$$\hat{M}_n(\xi) = D^{-n} B(\xi/2^n) D^{n-1} \hat{M}_{n-1}(\xi) \quad (12)$$

$$\hat{M}_n(2\xi) = D^{-1} \hat{M}_{n-1}(\xi) B(\xi). \quad (13)$$

Démonstration. Désignons par G_n la suite des fonctions matricielles de base du schéma de subdivision vectoriel de masque $\{A_\alpha\}$ et définissons $R_n(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\xi} G_n(\alpha)$ et $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\xi} A_\alpha$. À partir de (2), nous avons

$$R_{n+1}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\xi} A_{\alpha-2\beta} G_n(\beta).$$

En remplaçant $e^{-i\alpha\xi}$ par $e^{-i(\alpha-2\beta)\xi} e^{-i2\beta\xi}$ et en permutant les ordres de sommation, nous obtenons $R_{n+1}(\xi) = P(\xi) R_n(2\xi)$. Comme $R_0 = I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il vient

$$R_n(\xi) = P(\xi) P(2\xi) \cdots P(2^{n-2}\xi) P(2^{n-1}\xi).$$

Puisque $B(\xi) = P(\xi)/2$ et $\hat{M}_n(\xi) = D^{-n}R_n(\xi/2^n)/2^n$ car $\hat{M}_n(\xi) = M_n(e^{-i\xi\cdot})$, nous obtenons alors (11). Les deux formules (12) et (13) s'en déduisent facilement. \square

Remarque 4. Heil et Colella ont étudié le produit $C_n(\xi) = B(\xi/2^n) \cdots B(\xi/2)$. Ils ont proposé une condition nécessaire et suffisante de convergence de cette suite $C_n(\xi)$, puis ont montré que la suite $B(0)^n$ converge vers une matrice non triviale (Théorème 3.3 de [15]). Attention ici $\hat{M}_n = D^{-n}C_n$, si bien que la convergence de C_n n'est pas équivalente à la convergence de \hat{M}_n .

Théorème 10. *Soit T_n une suite de distributions dont les supports sont tous contenus dans le même intervalle borné. Si la suite T_n converge vers une distribution T , alors la suite des transformées de Fourier-Laplace $\hat{T}_n(\zeta)$ converge (uniformément sur tout disque de \mathbb{C}) vers la transformée de Fourier-Laplace $\hat{T}(\zeta)$.*

Démonstration. Nous supposons que la suite des distributions T_n converge vers la distribution T et nous choisissons un entier N tel que les supports de toutes les T_n soient contenus dans $[-N, N]$. Le support de la limite des T_n est alors contenu dans l'adhérence de l'union des supports (voir [24], t.1, p.76), donc le support de T est aussi contenu dans $[-N, N]$.

Choisissons une fonction $\alpha \in \mathcal{D}$ telle que $\alpha(x) = 1$ pour tout $x \in [-N-1, N+1]$ et soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ un disque de rayon R . La famille de fonctions $\Phi = \{\varphi : (\exists \zeta \in \Delta)(\forall x \in \mathbb{R}) \varphi(x) = \alpha(x)e^{-i\zeta x}\}$ est un ensemble borné inclus dans \mathcal{D} d'après la définition de Schwartz [24] t.1 p.68-69 ou celle d'Horváth [18] p.166 (i.e. il existe un intervalle borné K qui contient les supports de chaque fonction $\varphi \in \Phi$ et il existe une suite croissante b_k de nombres telle que $(\forall \varphi \in \Phi), \|d^k \varphi / dx^k\| \leq b_k$).

Dans la définition de la convergence de T_n vers T , pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n - T)(\varphi) = 0$ et cette convergence est uniforme sur tout sous-ensemble borné de \mathcal{D} ([24] t.1 p.71). Donc $(T_n - T)(\varphi)$ converge vers 0 uniformément sur Φ . Cela implique que $\hat{T}_n(\zeta)$ converge vers $\hat{T}(\zeta)$ uniformément sur Δ quand n tend vers $+\infty$. \square

En utilisant le lemme 4, le support de chacune des distributions M_n est contenu dans $[-N, N]$, où N désigne $\max\{|\alpha| : A_\alpha \neq 0\}$. De plus, par le lemme 9, $\hat{M}_n(\xi) = D^{-n}B(\xi/2^n) \cdots B(\xi/2)$. À partir de là, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante pour la convergence en distribution.

Corollaire 11. *Si un SSH de symbole B est \mathcal{D}' -convergent, alors pour tout ξ , la suite de fonctions matricielles $D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)$ converge (uniformément sur tout intervalle borné) vers la transformée de Fourier de la distribution matricielle de base, $\hat{M}(\xi)$. En particulier la suite de matrices $D^{-n}B(0)^n$ converge vers $\hat{M}(0)$.*

Lemme 12. *Si B est une matrice carrée d'ordre $r+1$ telle que la suite $D^{-n}B^n$ converge, si $Bx = \lambda x$, où $x = (x_0, x_1, \dots, x_r)^T \neq 0$ et si j est un indice vérifiant $x_j \neq 0$, alors $|\lambda| \leq 1/2^j$. De plus si $|\lambda| = 1/2^j$, $\lambda = 1/2^j$.*

Démonstration. C'est une conséquence du fait que la j -ième composante de $D^{-n}B^n x$ est précisément $(2^j \lambda)^n x_j$. \square

Corollaire 13. Si $B = (b_{jk})$ est une matrice carrée d'ordre $r + 1$ telle que la suite $D^{-n}B^n$ converge, si 1 est une valeur propre de B , alors $b_{00} = 1$ et pour tout $j > 0$, $b_{j0} = 0$.

Pour le prochain corollaire et dans la suite, nous désignerons par m_{jkn} l'élément en position (j, k) de M_n . Il s'agit d'une distribution scalaire et sa transformée de Fourier est notée $\hat{m}_{jkn}(\xi)$.

Corollaire 14. Si dans un SSH \mathcal{D}' -convergent, 1 est une valeur propre de $B(0)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\hat{m}_{j0n}(0) = \delta_{j0}$ pour $j = 0, 1, \dots, r$.

Démonstration. D'après (13),

$$\hat{m}_{j0n}(\xi) = \sum_{\ell=0}^r 2^\ell \hat{m}_{j\ell, n-1}(\xi) b_{\ell 0}(\xi).$$

Par le corollaire 13, nous obtenons $\hat{m}_{j0n}(0) = 2^j \hat{m}_{j0, n-1}(0)$, $j = 0, \dots, r$. Mais puisque $\hat{m}_{j00}(0) = \delta_{j0}$, on obtient pour tout n , $\hat{m}_{j0n}(0) = \delta_{j0}$. \square

Lemme 15. Si un SSH est \mathcal{D}' -convergent, alors la distribution matricielle de base et sa transformée de Fourier vérifient les équations fonctionnelles

$$M = D^{-1} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} M(2 \cdot -\alpha) A_\alpha, \quad (14)$$

$$\hat{M}(2\xi) = D^{-1} \hat{M}(\xi) B(\xi), \xi \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Démonstration. En utilisant le lemme 9, $\hat{M}_n(2\xi) = D^{-1} \hat{M}_{n-1}(\xi) B(\xi)$. Nous prenons la limite quand n tend vers ∞ et par le corollaire 11, nous obtenons (15).

Un calcul élémentaire permet d'établir que la transformée de Fourier de la distribution $D^{-1} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} M(2 \cdot -\alpha) A_\alpha$ est $D^{-1} \hat{M}(\xi/2) B(\xi/2) = \hat{M}(\xi)$. Par unicité de la transformée de Fourier, (14) est établie. \square

Théorème 16. Soit M la distribution matricielle de base d'un SSH d'ordre r \mathcal{D}' -convergent dont B est le symbole. Nous supposons que toutes les valeurs propres de $B(0)$ sont dans l'ensemble $\{|\lambda| < 1\} \setminus \{1/2^n : n = 1, \dots, r\}$ excepté 1 qui est aussi valeur propre simple.

Alors il existe un vecteur colonne $(u_0 = 1, u_1, \dots, u_r)^T$ tel que la j -ième ligne de M est $u_j T^{(j)}$, où T est la première ligne de M et $T^{(j)}$ la j -ième dérivée de la distribution vectorielle T .

De plus, si nous supposons que f_n est la suite des raffinements d'un SSH avec $f_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^r$ comme donnée initiale, alors la suite des distributions vectorielles $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha) / 2^n \delta_{\alpha/2^n}$ converge vers la distribution vectorielle U dont, pour $1 \leq j \leq r$, la j -ième composante est u_j multipliée par la j -ième dérivée de sa première composante.

Démonstration. Comme la transformée de Fourier d'une distribution à support borné est analytique (voir Théorème 7.23 de [23]), alors $\hat{M}(\xi)$ est analytique. La première ligne de M_n , $T_n = (1, 0, \dots, 0)M_n$ converge vers la distribution vectorielle $T =$

$(m_{00}, m_{01}, \dots, m_{0r})$ qui est alors la première ligne de M . À partir de (15), la fonction vectorielle $\phi(\xi) = \hat{T}(\xi) = (1, 0, \dots, 0)\hat{M}(\xi)$ est une solution analytique de l'équation

$$\phi(2\xi) = \phi(\xi)B(\xi). \quad (16)$$

En utilisant le corollaire 14, $\hat{m}_{00}(0) = 1$. Ce qui signifie que $\phi_0(0) = 1$, où les $r + 1$ composantes de ϕ sont $\phi_0(\xi), \phi_1(\xi), \dots, \phi_r(\xi)$.

Nous développons les fonctions $\phi_0(\xi), \dots, \phi_r(\xi)$ et les éléments $b_{jk}(\xi)$ de la matrice $B(\xi)$ en séries entières :

$$\phi_k(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{kn} \xi^n, \quad k = 0, 1, \dots, r \quad \text{et} \quad b_{jk}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jkn} \xi^n, \quad j, k = 0, \dots, r.$$

Ensuite, nous introduisons ces développements dans (16). En développant les produits et en réordonnant suivant les puissances de ξ , nous obtenons

$$2^n \phi_{kn} = \sum_{\nu=0}^n \sum_{\ell=0}^r \phi_{\ell\nu} b_{\ell k, n-\nu}, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

La série de Maclaurin des fonctions ϕ_k peut être calculée par récurrence.

Premièrement, $\phi(0)$ est le vecteur propre ligne pour $B(0)$ associé à la valeur propre 1. Sachant que 1 est une valeur propre et à la condition que $\phi_0(0) = 1$, les $r + 1$ nombres ϕ_{k0} , $k = 0, 1, \dots, r$ sont alors complètement déterminés.

Deuxièmement, pour tout entier $n > 0$, le système homogène

$$2^n \phi_{kn} = \sum_{\ell=0}^r \phi_{\ell n} b_{\ell k 0}, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

a seulement une solution non triviale, puisque pour tout $n > 0$, $2^n I - B(0)$ est une matrice inversible. Donc, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, (17) a une unique solution. On en déduit que tous les coefficients inconnus ϕ_{kn} , $k = 0, \dots, r$, $n > 0$ sont déterminés de manière unique.

Soit j un entier compris entre 1 et r . Par (15), la fonction vectorielle $\psi(\xi)$ qui est égale à la j -ième ligne de $\hat{M}(\xi)$ est une solution analytique de l'équation vectorielle

$$\psi(2\xi) = 2^j \psi(\xi)B(\xi) \quad (18)$$

Les $r + 1$ composantes de $\psi(\xi)$ sont notées $\psi_k(\xi)$, $k = 0, 1, \dots, r$.

Nous développons les fonctions $\psi_0(\xi), \dots, \psi_r(\xi)$ en séries entières : $\psi_k(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{kn} \xi^n$ pour $k = 0, 1, \dots, r$. Nous introduisons ces développements dans (18), en développant les produits et en réorganisant les résultats suivant les puissances croissantes de ξ . Il vient

$$2^n \psi_{kn} = 2^j \sum_{\nu=0}^n \sum_{\ell=0}^r \psi_{\ell\nu} b_{\ell k, n-\nu}, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

La série de Maclaurin des fonctions ψ_k peut être calculée par récurrence. Premièrement, si nous utilisons (19) avec $n = 0$, alors $(\psi_{00}, \psi_{10}, \dots, \psi_{r0})$ est un vecteur propre ligne

de $B(0)$ associé à la valeur propre potentielle $1/2^j$. Mais puisque $1/2^j$ n'est pas une valeur propre alors $\psi_{k0} = 0, k = 0, \dots, r$. De la même façon, si à partir de (19) avec $n = 1, \dots, j-1$, nous obtenons que $(\psi_{0n}, \psi_{1n}, \dots, \psi_{rn})$ est un vecteur propre ligne de $B(0)$ associé à la valeur propre potentielle $2^n/2^j$. Puisque à nouveau $2^n/2^j$ n'est pas une valeur propre, $\psi_{kn} = 0, k = 0, \dots, r$ pour tout $n < j$.

Si bien que l'équation (19) se ramène à

$$2^n \psi_{kn} = 2^j \sum_{\nu=j}^n \sum_{\ell=0}^r \psi_{\ell\nu} b_{\ell k, n-\nu}, \quad k = 0, 1, \dots, r, \quad n = j, j+1, j+2, \dots \quad (20)$$

Deuxièmement à partir de (20) avec $n = j$, nous obtenons que $(\psi_{0j}, \psi_{1j}, \dots, \psi_{rj})$ est un vecteur propre ligne de $B(0)$ associé à la valeur propre 1. Ce vecteur propre est uniquement déterminé par sa première composante ψ_{0j} .

Troisièmement, pour toute valeur $n > j$, le système homogène

$$2^n \psi_{kn} = 2^j \sum_{\ell=0}^r \psi_{\ell n} b_{\ell k 0}, \quad k = 0, 1, \dots, r.$$

a une unique solution non triviale, puisque pour tout $n > 0$, $2^n I - 2^j B(0)$ est inversible. Alors pour $n = j+1, j+2, j+3, \dots$, il existe une unique solution à (19). Ainsi tous les coefficients ψ_{kn} , $k = 0, \dots, r$, $n \geq 0$ sont déterminés de manière unique.

Ajoutons qu'une comparaison entre (17) et (20) montre que les deux équations sont similaires et que $\psi(\xi) = \psi_{0j} \xi^j \phi(\xi)$; ce qui signifie que $\hat{m}_{jk}(\xi) = \psi_{0j} \xi^j \hat{m}_{0k}(\xi)$.

Rappelons que la dérivée d'une distribution T est toujours définie par $T'(\varphi) = -T(\varphi')$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, (voir [24], t.1 p.35 ou [23], p.158).

En notant $T^{(j)}$ la j -ième dérivée d'une distribution T pour $j = 1, 2, \dots, r$, comme $T^{(j)}(e^{-i\xi}) = (i\xi)^j T(e^{-i\xi})$, par unicité de la transformée de Fourier, il s'ensuit que $m_{jk} = (-i)^j \psi_{0j} m_{0k}^{(j)}$ pour $k = 0, \dots, r$. En fixant $u_j = (-i)^j \psi_{0j}$, nous obtenons la première conclusion du théorème.

Si nous supposons que f_n est la suite des raffinements d'un SSH avec $f_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^r$ comme donnée initiale, alors la suite de distributions vectorielles $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha) / 2^n \delta_{\alpha/2^n}$ converge vers la distribution vectorielle $U = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} [\tau_\alpha M] f_0(\alpha)$ d'après le théorème 8.

Nous remarquons enfin que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$, $\tau_\alpha(m_{0k}^{(j)}) = (\tau_\alpha m_{0k})^{(j)}$ pour $j, k = 0, \dots, r$, si bien que $\tau_\alpha m_{jk} = u_j (\tau_\alpha m_{0k})^{(j)}$. Si $U = (U_0, U_1, \dots, U_r)^T$, par linéarité, il vient $U_j = u_j U_0^{(j)}$, $j = 0, \dots, r$. \square

Théorème 17. *Soit M la distribution matricielle de base d'un schéma de subdivision d'Hermite d'ordre r \mathcal{D}' -convergent dont B est le symbole. Nous supposons que 1 est une valeur propre simple de $B(0)$ et que les autres valeurs propres de $B(0)$ sont dans $\{|\lambda| < 1\} \setminus \{1/2^n : n = 1, \dots, r\}$. Soit $C = (c_{jk})$ la matrice triangulaire dont la partie inférieure est $c_{jk} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{jk}(\alpha) (-\alpha)^{j-k} 2^{k-1} / (j-k)!$, $j \geq k$, où $a_{jk}(\alpha)$ est l'élément en position (j, k) du masque A_α du schéma.*

Alors 1 est une valeur propre de C et nous pouvons choisir le vecteur propre associé $(u_0, u_1, \dots, u_r)^T$ de façon à ce que $u_0 = 1$. La j -ième ligne de M est obtenue en multipliant la première ligne de M par u_j .

Démonstration. Supposons que $|\xi| \leq 1$. Si $B = (b_{jk})$, alors $D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1} = (2^{jn-k(n-1)}b_{jk}(\xi/2^n))$. De (12), nous déduisons que

$$\hat{m}_{j0n}(\xi) = \sum_{k=0}^j 2^{(j-k)n+k} b_{jk}(\xi/2^n) \hat{m}_{k0,n-1}(\xi) + O(1/2^n),$$

puisque ξ est borné.

À partir du développement de Taylor de $b_{jk}(\xi)$, il vient

$$\hat{m}_{j0n}(\xi) = \sum_{k=0}^j \sum_{\ell=0}^{j-k} 2^{(j-k-\ell)n+k} b_{jk}^{(\ell)}(0) / \ell! \xi^\ell \hat{m}_{k0,n-1}(\xi) + O(1/2^n).$$

Si bien qu'en posant $k + \ell = \ell'$,

$$\hat{m}_{j0n}(\xi) = \sum_{\ell'=0}^j \sum_{k=0}^{\ell'} 2^{(j-\ell')n+k} b_{jk}^{(\ell'-k)}(0) / (\ell' - k)! \xi^{\ell'-k} \hat{m}_{k0,n-1}(\xi) + O(1/2^n).$$

Or, nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{m}_{00n}(0) = 1$ (corollaire 14) et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{m}_{j0n}(\xi) = u_j (i\xi)^j, j = 1, \dots, r$$

(théorème 16). Lorsque n tend vers $+\infty$, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{\ell} b_{jk}^{(\ell-k)}(0) / (\ell - k)! i^k 2^k u_k = 0, \ell = 0, 1, \dots, j - 1$$

et

$$\sum_{k=0}^j b_{jk}^{(j-k)}(0) / (j - k)! i^k 2^k u_k = i^j u_j.$$

Puisque $B(\xi) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} e^{-i\alpha\xi}/2$, alors

$$\frac{d^s b_{jk}}{d\xi^s}(0) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} a_{\alpha jk} (-i\alpha)^s / 2$$

et nous obtenons que le vecteur $(u_0, u_1, \dots, u_r)^T$ est un vecteur propre de C pour la valeur propre 1. \square

6. Équations de raffinement et schémas d'Hermite. Dans le cas scalaire, les équations de raffinement ont d'abord été étudiées par Cavaretta, Dahmen et Michelli [1] ainsi que par Daubechies et Lagarias [5]. Une extension de ces équations a été proposée par Strang et Strela [26] (voir aussi [16]). Dans cette partie, nous rappelons la définition d'une équation vectorielle de raffinement et montrons qu'elle peut être complètement reliée à un SSH. Nous illustrons ce lien avec un exemple tiré de l'article [4] de Dahmen, Han, Jia et Kunoth.

Définition 13. Une *équation vectorielle de raffinement* est définie par :

$$\phi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} C_\alpha \phi(2x - \alpha), x \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

où $\phi = (\phi_0, \dots, \phi_r)^T$ est une distribution vectorielle à $r + 1$ composantes et $\{C_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$ est un ensemble fini de matrices carrées d'ordre $r + 1$ appelé *masque du raffinement*.

Lorsque nous dérivons j fois (21), nous obtenons :

$$\phi^{(j)}(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} 2^j C_\alpha \phi^{(j)}(2x - \alpha), x \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

Pour $j = 0, \dots, r$, ces équations peuvent aussi s'écrire :

$$\begin{cases} (\phi_0(x), \dots, \phi_r(x)) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} 2^0 (\phi_0(2x - \alpha), \dots, \phi_r(2x - \alpha)) C_\alpha^T, \\ \vdots & \vdots \\ (\phi_0^{(r)}(x), \dots, \phi_r^{(r)}(x)) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} 2^r (\phi_0^{(r)}(2x - \alpha), \dots, \phi_r^{(r)}(2x - \alpha)) C_\alpha^T. \end{cases}$$

En définissant la distribution matricielle

$$M(x) = \begin{pmatrix} \phi_0(x) & \phi_1(x) & \dots & \phi_r(x) \\ \phi_0'(x) & \phi_1'(x) & \dots & \phi_r'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_0^{(r)}(x) & \phi_1^{(r)}(x) & \dots & \phi_r^{(r)}(x) \end{pmatrix},$$

les équations précédentes peuvent être synthétisées en

$$M(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} D^{-1} M(2x - \alpha) C_\alpha^T, x \in \mathbb{R}. \quad (23)$$

Ce qui signifie que (14) est vérifiée avec $A_\alpha = C_\alpha^T$. Réciproquement, nous considérons un SSH d'ordre r \mathcal{D}' -convergent et nous notons M la distribution matricielle de base. En posant $\phi = (m_{00}, m_{01}, \dots, m_{0r})^T$, grâce à (14), il est facile de vérifier que ϕ est solution de (21). Un exemple d'une telle équation de raffinement est proposé par Dahmen *et al.* [4]. Les composantes de la solution vectorielle, $\phi = (\phi_0, \phi_1)^T$ sont de classe $C^1(\mathbb{R})^2$ et polynomiales de degré 3 par morceaux. Le masque du raffinement est défini par :

$$C_{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ -1/8 & -1/8 \end{pmatrix}, C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/4 \\ 1/8 & -1/8 \end{pmatrix}, C_\alpha = 0 \text{ sinon.}$$

En fait cet exemple est le même que celui étudié dans le paragraphe 3 avec $r = 1$. Dans la figure 1, on peut voir le graphe de ϕ_0, ϕ_1 ainsi que celui de leur dérivée.

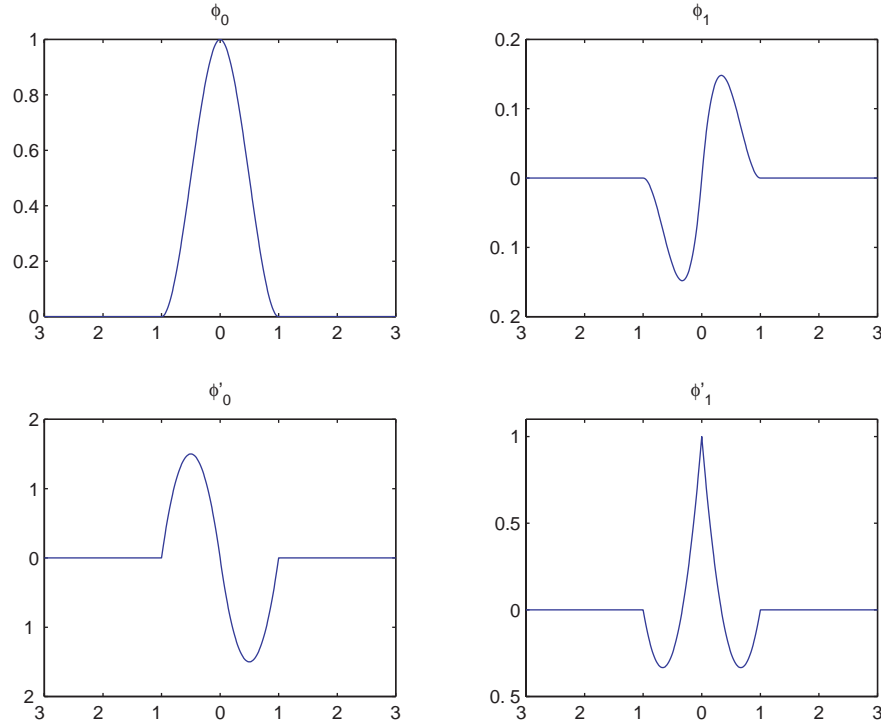


FIG. 1. Cubiques par morceaux et dérivées construites par subdivision

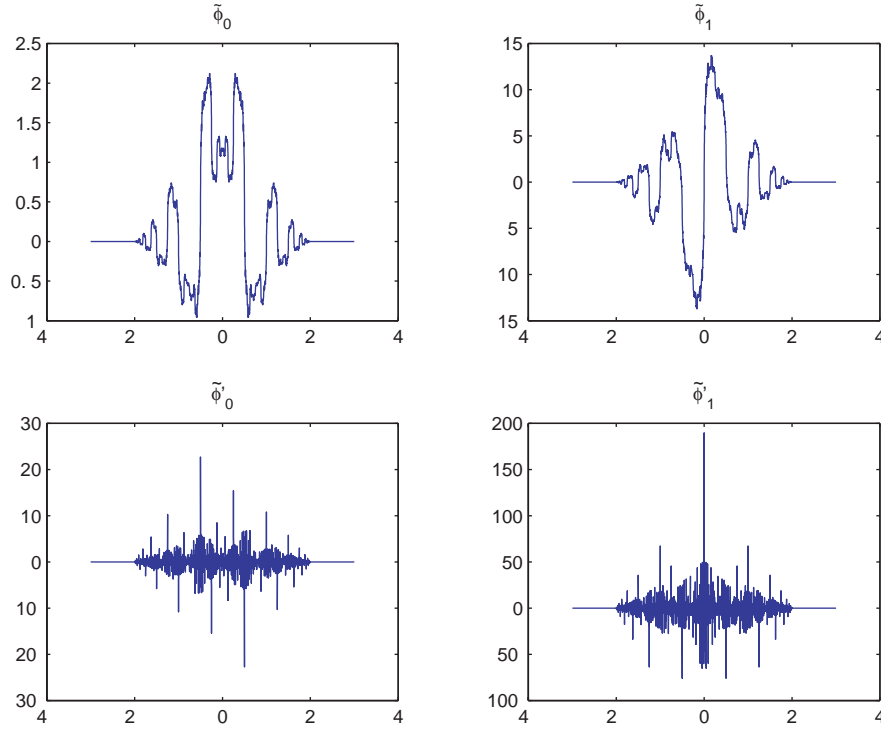
Ajoutons que dans ce même article, un second exemple est proposé avec comme masque du raffinement :

$$\tilde{C}_{-2} = \begin{pmatrix} -7/64 & -5/64 \\ 87/128 & 31/64 \end{pmatrix}, \tilde{C}_{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/16 \\ -99/32 & -37/32 \end{pmatrix}, \tilde{C}_0 = \begin{pmatrix} 39/32 & 0 \\ 0 & 15/8 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/16 \\ 99/32 & -37/32 \end{pmatrix}, \tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} -7/64 & 5/64 \\ -87/128 & 31/64 \end{pmatrix}, C_\alpha = 0 \text{ si } |\alpha| > 2.$$

Les auteurs montrent que la solution $\tilde{\phi}$ est dans $H^s(\mathbb{R})^2$ avec $s < 0.824926$ (Proposition 3.1 de [4]) et, en particulier que $\tilde{\phi}$ est continue. Dans la figure 2, nous avons construit le graphe de $\tilde{\phi}_0, \tilde{\phi}_1$ ainsi que le graphe d'une approximation des dérivées au sens des distributions obtenues à la profondeur $n = 9$. Fait remarquable, les deux exemples sont duaux au sens qu'ils vérifient les deux équations :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} C_\alpha \tilde{C}_{\alpha+2\beta}^T = 2\delta_{0\beta} I \quad \text{et} \quad (\phi, \tilde{\phi}(\cdot - \alpha))_{\mathbb{R}} = \delta_{0\alpha} I.$$

FIG. 2. Approximation de la base duale à la profondeur $n = 9$

7. Convergence de produits infinis de matrices. Dans cette partie, nous mettons provisoirement de côté les schémas de subdivision d'Hermite pour nous intéresser aux produits infinis de matrices. Étant donné un produit infini, nous proposons des conditions pour que les normes des produits partiels soient bornées ou pour que le produit infini soit convergent. Pour cette étude, nous nous appuyons sur l'approche des produits infinis dans une algèbre de Banach proposée par Fleischer et Joffe [11].

Lemme 18 (Fleischer et Joffe). Soient a_n, b_n deux suites dans une algèbre de Banach vérifiant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n - b_n\| = \epsilon < 1/C \text{ avec } C \geq 1 \text{ et } \|a_j a_{j+1} \cdots a_n\| \leq C \text{ pour } 1 \leq j \leq n.$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|b_1 b_2 \cdots b_n\| < \frac{C}{1 - C\epsilon} \text{ et } \|a_1 a_2 \cdots a_n - b_1 b_2 \cdots b_n\| \leq \frac{C^2}{1 - C\epsilon} \sum_{k=1}^n \|a_k - b_k\|.$$

Comme indiqué par Fleischer et Joffe, le lemme résulte de l'égalité élémentaire

$$\prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k = \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^{j-1} b_k (a_j - b_j) \prod_{k=j+1}^n a_k.$$

Théorème 19. Soient a_n, b_n deux suites dans une algèbre de Banach. Nous supposons que

$$C \geq 1, \|a_m a_{m+1} \cdots a_n\| \leq C, \text{ pour } 1 \leq m \leq n \text{ et que } \sum_{n=N+1}^{\infty} \|a_n - b_n\| < 1/(2C).$$

Si nous définissons $C' = \max\{1, \|b_1 b_2 \cdots b_n\| : 0 < n \leq N\}$, alors pour tout $n \geq 1$, on obtient $\|b_1 b_2 \cdots b_n\| \leq 2CC'$.

Démonstration. Nous appliquons le lemme 18 aux suites a_{N+n}, b_{N+n} pour $n = 1, 2, \dots$ avec $\epsilon = 1/(2C)$. Nous en déduisons que $\|b_{N+1} b_{N+2} \cdots b_{N+n}\| < 2C$. Puisque $\|b_1 b_2 \cdots b_N\| \leq C'$, la conclusion est évidente. \square

Théorème 20. Soient a_n, b_n deux suites dans une algèbre de Banach vérifiant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n - b_n\| < \infty \text{ et } \sup_{n \geq 1} \max \left\{ \left\| \prod_{k=m}^n a_k \right\| : 1 \leq m \leq n \right\} < \infty.$$

Si nous supposons que pour chaque entier $m > 0$, la suite $a_m a_{m+1} \cdots a_n$ converge, alors la suite $b_1 b_2 \cdots b_n$ converge aussi.

Démonstration. Soit $C = \sup \{1, \|a_m a_{m+1} \cdots a_n\|, 1 \leq m \leq n\}$. Choisissons un entier $N_0 > 0$ vérifiant $\sum_{n=N_0}^{\infty} \|a_n - b_n\| < 1/(2C)$ et définissons C' par $C' = \max\{1, \|b_1 b_2 \cdots b_n\| : 0 < n \leq N_0\}$. Nous allons montrer que la suite $c_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ est de Cauchy.

Soit ϵ un réel strictement positif. Nous choisissons un entier $N > N_0$ tel que $\sum_{n=N}^{\infty} \|a_n - b_n\| < \epsilon$. Ensuite, nous choisissons un nouvel entier $N' > N$ vérifiant $(\forall n \geq N') (\forall n' > n) \|a_N a_{N+1} \cdots a_n - a_N a_{N+1} \cdots a_{n'}\| < \epsilon$. Or $c_n - c_{n'}$ s'écrit

$$c_n - c_{n'} = \prod_{k=1}^{N-1} b_k [(b_N \cdots b_n - a_N \cdots a_n) + (a_N \cdots a_n - a_N \cdots a_{n'})] + (a_N \cdots a_{n'} - b_N \cdots b_{n'}).$$

Alors, d'après le lemme 18 ainsi que le théorème 19, $\|c_n - c_{n'}\| \leq 2CC'(2\frac{C^2\epsilon}{1-C\epsilon} + \epsilon)$ dès que $n > N'$ et $n' > n$. Maintenant les majorants C, C' ne dépendent pas de ϵ , si bien que la suite c_n converge. \square

Dans les trois derniers résultats, nous pouvons permuter simultanément les produits des a_n et des b_n . En particulier, on peut considérer les produits « hébreux » $a_n a_{n-1} \cdots a_1$ et $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ pour obtenir les théorèmes correspondants.

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n - b_n\| < \infty, \text{ si de plus l'ensemble des normes } \{\|a_n a_{n-1} \cdots a_m\| : 0 < m \leq n\}$$

est borné, et si, enfin, pour tout entier $m > 0$, la suite $a_n a_{n-1} \cdots a_m, n \geq m$ converge, alors la suite $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ converge.

8. Conditions suffisantes de convergence. Pour obtenir des conditions pour lesquelles la suite des distributions matricielles M_n converge, nous rappelons un théorème de Gel'fand et Shilov [12]. Ensuite, nous introduisons la condition E sur le symbole d'un SSH. Cette condition E assurera la convergence du schéma au sens des distributions.

Théorème 21 (Gel'fand et Shilov). Soit T_n une suite de distributions tempérées sur \mathbb{R} . Nous supposons que leur transformée de Fourier $g_n(\xi) = \hat{T}_n(\xi)$ remplit les deux conditions suivantes

- i) $g_n(\xi)$ converge simplement vers $g(\xi)$ quand $n \rightarrow \infty$;
- ii) $(\exists a > 0)(\exists c > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \xi \in \mathbb{R}) |g_n(\xi)| \leq c \max(1, |\xi|^a)$.

Alors il existe une distribution tempérée T de transformée de Fourier g telle que T_n converge de manière faible vers T .

Définition 14. La condition E pour le symbole $B(\xi) = (b_{jk}(\xi))$ d'ordre r s'écrit :

- i) $b_{00}(0) = 1$ et $|b_{jj}(0)| < 1/2^j$, $j = 1, \dots, r$;
- ii) si $j > k$, alors $b_{jk}^{(\ell)}(0) = 0$ pour $\ell = 0, \dots, j - k - 1$.

Notons qu'il n'y a pas de condition pour les éléments au dessus de la diagonale.

Lemme 22. Si la condition E est vérifiée pour le symbole $B(\xi) = (b_{jk}(\xi))$, alors la suite $D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1}$ converge. La matrice limite $\Gamma(\xi) = (\gamma_{jk}(\xi))$ est une matrice triangulaire inférieure de diagonale $b_{00}(0), 2b_{11}(0), \dots, 2^r b_{rr}(0)$ et de partie inférieure $\gamma_{jk}(\xi) = 2^k b_{jk}^{(j-k)}(0)/(j-k)! \xi^{j-k}$, $j \geq k$.

De plus, dans tout intervalle borné, il existe un réel $\beta > 0$ tel que pour tout $n > 0$ et pour tout $\xi \in I$, on a $\|D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1} - \Gamma(\xi)\| \leq \beta/2^n$.

Démonstration. Soit I un intervalle contenant 0. Nous remarquons que

$$D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1} = (b_{jk}(\xi/2^n)2^{(j-k)n+k})$$

et nous étudions deux cas :

Premier cas : $0 \leq j < k \leq r$.

Si β_{jk} est un majorant de $|b_{jk}(\xi)|$, $\xi \in I$, alors $2^{k-n}\beta_{jk}$ est un majorant de l'élément en position (j, k) de $D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1}$ pour tout n .

Second cas : $0 \leq k \leq j \leq r$.

Nous définissons $\beta_{jk} = \sup\{|b_{jk}^{(j-k+1)}(\xi)|/(j-k+1)! : \xi \in I\}$. Comme $b_{jk}^{(\ell)}(0) = 0$ pour $\ell = 0, \dots, j - k - 1$ par la condition E partie i), en utilisant le reste de Lagrange dans le développement de Taylor, il vient

$$\left| b_{jk}(\xi) - b_{jk}^{(j-k)}(0)/(j-k)! \xi^{j-k} \right| \leq \beta_{jk} |\xi|^{j-k+1} \text{ pour tout } \xi \in I.$$

Si $\xi/2^n \in I$, alors

$$\left| b_{jk}(\xi/2^n) - 2^{-(j-k)n} b_{jk}^{(j-k)}(0)/(j-k)! \xi^{j-k} \right| \leq \beta_{jk} |\xi|^{j-k+1} 2^{-(j-k+1)n}.$$

En multipliant cette inégalité par $2^{(j-k)n+k}$, on obtient que $2^{k-n}\beta_{jk} |\xi|^{j-k+1}$ est un majorant pour l'élément en position (j, k) de $D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1} - \Gamma(\xi)$ pour tout n et tout $\xi \in I$. À partir de ces deux cas, on peut conclure. \square

Lemme 23. *Si la condition E est vérifiée pour le symbole $B(\xi)$, alors la suite de fonctions matricielles $D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/2)$ est uniformément bornée sur tout intervalle borné et converge simplement.*

Démonstration. Soit I un intervalle borné. Après avoir fixé $a_n(\xi) = \Gamma(\xi)$, où $\Gamma(\xi)$ est la matrice du lemme 22 et $b_n(\xi) = D^{-n}B(\xi/2^n)D^{n-1}$ pour $n > 0$, nous utilisons les théorèmes 19 et 20. Grâce au lemme 22, nous savons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $\xi \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n(\xi) - b_n(\xi)\| \leq c$. Les valeurs propres de $\Gamma(\xi)$ sont les éléments de sa diagonale, soit $2^j b_{jj}(0)$, $j = 0, \dots, r$. De la condition E partie (i), nous déduisons que la suite $\Gamma^n(\xi)$ converge. (Les puissances d'une matrice convergent si 1 est une valeur propre simple et si les autres valeurs propres sont contenues dans le disque unité ouvert de \mathbb{C} , voir Oldenberger [22].) Les hypothèses des théorèmes 19 et 20 sont satisfaites, donc la suite $b_n(\xi)b_{n-1}(\xi) \cdots b_1(\xi) = D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/2)$ est uniformément bornée pour $\xi \in I$ et elle converge simplement. \square

Lemme 24. *Si la condition E est vérifiée pour le symbole B , alors il existe deux réels strictement positifs a et c tels que*

$$(\forall n > 0), (\forall \xi \in \mathbb{R}), \|D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)\| \leq c \max(1, |\xi|^a).$$

Démonstration. Du lemme 23, nous déduisons que

$$c = \sup_n \sup_{|\xi| \leq 1} \|D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/2)\|$$

est fini. En définissant $L = \|D^{-1}\| \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|B(\xi)\|$ et en utilisant l'inégalité

$$\|D^{-n}B(\xi/2^n) \cdots B(\xi/2)\| \leq \|D^{-1}\| \cdot \|D^{-n+1}B(\xi/2^n) \cdots B(\xi/4)\| \cdot \|B(\xi/2)\|,$$

on peut montrer par récurrence sur $k > 0$ que

$$(\forall n > 0) (\forall \xi \in \mathbb{R}), \quad |\xi| \leq 2^k$$

$$\Rightarrow \|D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)\| \leq cL^{k-1}.$$

À partir de là, si $\xi \leq 1$, alors $\|D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)\| \leq c$, et si $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^k$, $k > 0$, alors

$$\|D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)\| \leq cL^{k-1} \leq c|\xi|^{\log L / \log 2}.$$

Si bien qu'il suffit de choisir $a = \log L / \log 2$ pour obtenir la conclusion. \square

Théorème 25. *Si la condition E est vérifiée pour un SSH, alors le schéma est \mathcal{D}' -convergent.*

Démonstration. À partir des lemmes 9, 23 et 24, en utilisant aussi les théorèmes 21 et 7, la suite de distributions matricielles M_n converge vers M , distribution matricielle de base. D'après le théorème 8, le schéma d'Hermite est \mathcal{D}' -convergent. \square

Corollaire 26. Soit $A_\alpha = \begin{pmatrix} a_{00}(\alpha) & a_{01}(\alpha) \\ a_{10}(\alpha) & a_{11}(\alpha) \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ le masque d'un SSH d'ordre $r = 1$. Nous supposons que

$$\sum_{\alpha} a_{00}(\alpha) = 2, \sum_{\alpha} a_{10}(\alpha) = 0, \left| \sum_{\alpha} a_{11}(\alpha) \right| < 1.$$

Alors le schéma est \mathcal{D}' -convergent.

À noter que dans le corollaire précédent, il n'y pas de condition sur les nombres $a_{01}(\alpha)$. Dans [7], nous avons démontré un résultat plus faible : si le masque d'un schéma d'Hermite vérifie

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \alpha \\ (1-\beta)/2 & \beta/4 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -\alpha \\ -(1-\beta)/2 & \beta/4 \end{pmatrix},$$

où $|1-\beta| < 1$, alors le schéma est \mathcal{D}' -convergent (théorèmes 4 et 5 dans [7]).

La condition E est suffisante pour assurer la convergence. Examinons maintenant comment elle est loin d'être nécessaire à l'aide d'un SSH \mathcal{D}' -convergent d'ordre $r = 1$. Soit $B(\xi)$ le symbole d'un tel schéma.

La condition E donne

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & b_{01}(0) \\ 0 & b_{11}(0) \end{pmatrix}.$$

Donc 1 est valeur propre avec $(1, 0)^T$ comme vecteur propre. L'autre valeur propre est $b_{11}(0)$; elle vérifie $|b_{11}(0)| < 1/2$.

Réciproquement, nous distinguons plusieurs cas possibles pour le spectre de $B(0)$.

Cas 1) Les deux racines caractéristiques sont dans le disque unité ouvert. On peut alors montrer que la suite de vecteurs $B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)(1, 0)^T$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle borné. Si f_n désigne la suite des raffinements à partir des données initiales f_0 , alors la suite des premières composantes de la distribution vectorielle $T_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha)/2^n \delta_{\alpha/2^n}$ converge vers 0 dans l'espace \mathcal{D}' . Nous ne savons pas si nous obtenons toujours la convergence en distribution, mais nous sommes sûrs d'obtenir un schéma d'Hermite dégénéré.

Cas 2) Il existe une valeur propre λ vérifiant $|\lambda| \geq 1$ et $(1, 0)^T$ n'est pas un vecteur propre associé. Notons $v = (x_0, 1)^T$ un vecteur propre associé à λ . La seconde composante de $D^{-n}B(0)^n v$ est $(2\lambda)^n$ et la suite de matrices $D^{-n}B(0)^n$ diverge. Du corollaire 11, on déduit que le schéma n'est pas \mathcal{D}' -convergent.

Cas 3) Il existe une valeur propre $\lambda \neq 1$ telle que $|\lambda| \geq 1$ et $(1, 0)^T$ est un vecteur propre associé. On a alors

$$B(0) = \begin{pmatrix} \lambda & b_{01}(0) \\ 0 & b_{11}(0) \end{pmatrix}$$

et la suite de matrices $D^{-n}B(0)^n$ diverge. Du corollaire 11, on conclut que le schéma n'est pas \mathcal{D}' -convergent.

Cas 4) 1 est une valeur propre et $(1, 0)^T$ est un vecteur propre associé. Alors

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1 & b_{01}(0) \\ 0 & b_{11}(0) \end{pmatrix}.$$

Sous-cas 4.1) Si $|b_{11}(0)| > 1/2$ ou si $|b_{11}(0)| = 1/2$ avec $b_{11}(0) \neq 1/2$ alors la suite de matrices $D^{-n}B(0)^n$ diverge et, à nouveau grâce au corollaire 11, le schéma n'est pas \mathcal{D}' -convergent.

Sous-cas 4.2) Si $b_{11}(0) = 1/2$, nous conjecturons que le SSH est \mathcal{D}' -convergent.

Sous-cas 4.3) Dans le cas où $|b_{11}(0)| < 1/2$, la condition E est vérifiée et le schéma est donc \mathcal{D}' -convergent.

9. Exemples. Nous commençons par un SSH d'ordre 1 qui est \mathcal{D}' -convergent mais pas C^1 -convergent. Ensuite, nous étudions plusieurs familles d'exemples pour lesquelles la convergence au sens des distributions est assurée.

9.1. Un schéma d'Hermite \mathcal{D}' -convergent mais pas C^1 -convergent. Pour notre premier exemple, nous prenons le schéma d'ordre 1 de masque

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 3/10 & 0 \\ 1/4 & 5/32 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 7/10 & 0 \\ 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 7/10 & 0 \\ -1/8 & 1/8 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3/10 & 0 \\ -1/4 & 5/32 \end{pmatrix}, \quad A_\alpha = 0 \quad \text{si } \alpha \notin [-1, 2].$$

Le corollaire 26 nous assure que ce schéma d'Hermite est \mathcal{D}' -convergent. La distribution matricielle de base, $M = (m_{jk})$ existe. La matrice C définie dans le théorème 17 est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix};$$

1 est une valeur propre simple de vecteur propre colonne associé $(1, 1)^T$. Si $\phi_0 = m_{00}$, $\phi_1 = m_{01}$, alors par le théorème 17, $m_{10} = \phi'_0$ et $m_{11} = \phi'_1$. Dans la figure 3, nous avons dessiné les approximations de chaque élément de M à la profondeur $n = 9$. Plus précisément, si

$$F_n(\alpha) = \begin{pmatrix} f_{00}^{(n)}(\alpha) & f_{01}^{(n)}(\alpha) \\ f_{10}^{(n)}(\alpha) & f_{11}^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix}$$

est la suite de fonctions matricielles de base du schéma, nous proposons 4 graphes en dessinant seulement les points de coordonnées

$$(\alpha/2^9, f_{jk}^{(9)}(\alpha)), \quad \alpha \in \mathbb{Z} \cap [-2.2^9, 3.2^9] \text{ pour } j = 0, k = 0 \text{ (en haut et à gauche),}$$

$$j = 0, k = 1 \text{ (en haut et à droite), } j = 1, k = 0 \text{ (en bas et à gauche),}$$

$$j = 1, k = 1 \text{ (en bas et à droite).}$$

Ce qui saute aux yeux, dans le graphe en haut et à droite, c'est que $\phi_1 = 0$. C'est une conséquence du fait que l'élément en position $(0, 1)$ du symbole est toujours nulle. Dans le dessin en haut et à gauche, la fonction ϕ_0 a l'air d'être régulière, mais nous voyons bien en dessous que nous n'obtenons pas le graphe de ϕ'_0 . Cela s'explique : nous n'avons pas une convergence uniforme mais seulement une convergence en distribution. Nous avons ainsi une illustration que nous n'avons pas de convergence C^1 dans ce cas.

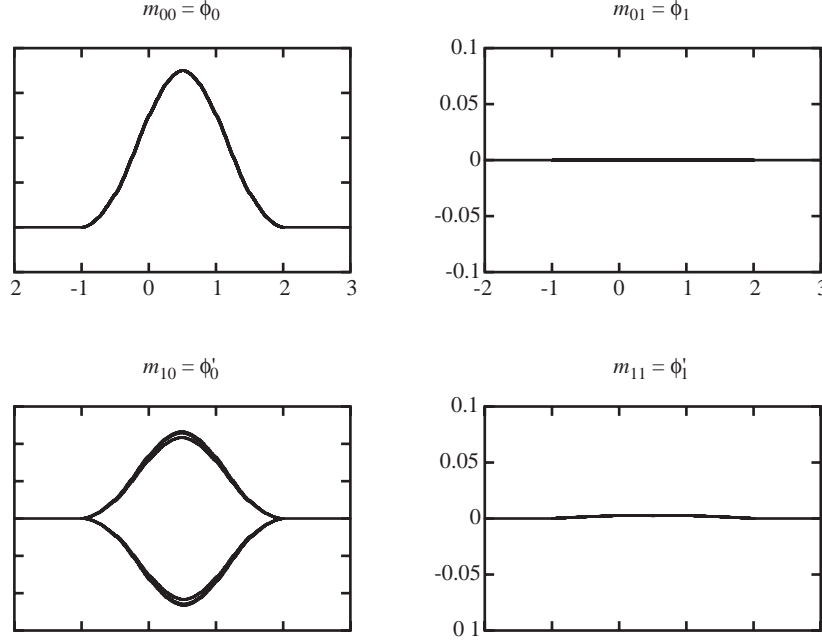


FIG. 3. Approximation de la distribution matricielle de base à la profondeur $n = 9$

9.2. Schémas interpolants à 2 points. Nous étudions le cas général des schémas d'Hermite interpolants à 2 points. Nous supposons que la fonction $f^{(0)}$ et ses r premières dérivées $f^{(j)}, j = 1, \dots, r$ sont connues sur \mathbb{Z} . Nous construisons alors $f^{(0)}, \dots, f^{(r)}$ sur $\mathbb{Z}/2^n$ par raffinement comme suit.

À l'étape n , définissons $h = 1/2^n$ et $\Delta_n = \{x = \alpha h, \alpha \in \mathbb{Z}\}$. Si $a = \alpha h$ et $b = (\alpha + 1)h$ sont deux points successifs de Δ_n , nous évaluons $f^{(0)}, \dots, f^{(r)}$ au point milieu $x = (a + b)/2$ par les formules :

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^r (\alpha_{jk} f^{(k)}(b) + \beta_{jk} f^{(k)}(a)) h^{k-j}, j = 0, \dots, r. \quad (24)$$

Ainsi $f^{(0)}, \dots, f^{(r)}$ sont définies sur Δ_{n+1} . La construction dépend de deux matrices carrées $W_{-1} = (\alpha_{jk})$ et $W_1 = (\beta_{jk})$. En itérant le procédé, on définit $f^{(0)}, \dots, f^{(r)}$ sur l'ensemble des nombres dyadiques $\Delta_\infty = \bigcup \Delta_n$ qui est dense dans \mathbb{R} .

Ce schéma généralise les constructions de Merrien [20,21] pour obtenir des interpolants d'Hermite pour $r = 1$ ou $r = 2$.

Le schéma précédent est donc un SSH de masque $A_\alpha = DW_\alpha, \alpha = \pm 1, A_0 = D$ et $A_\alpha = 0$ pour les autres valeurs de α . Ce schéma est *symétrique* dès que $\beta_{jk} = (-1)^{j+k} \alpha_{jk}$ pour $j, k = 0, \dots, m$.

Désormais, nous supposons que les schémas sont symétriques.

Le symbole $B(\xi)$ est alors $D(I + e^{-i\xi}W_1 + e^{i\xi}W_{-1})/2$; l'élément $b_{jk}(\xi)$ est $(\delta_{jk}/2 + \alpha_{jk} \cos \xi)/2^j$ si $j - k$ est pair et $i(\alpha_{jk} \sin \xi)/2^j$ si $j - k$ est impair. La matrice $C = (c_{jk})$

du théorème 17 vérifie $c_{jk} = 0$ si $j < k$, $c_{jj} = 1/2 + \alpha_{jj}$ pour $j = 0, 1, \dots, r$ et $c_{jk} = \alpha_{ij}/[2^{j-k}(j-k)!]$ si $j > k$.

Exemple 2. Schémas d'ordre 1

Dans ce cas,

$$B(\xi) = D \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha_{00} \cos \xi & i\alpha_{01} \sin \xi \\ i\alpha_{10} \sin \xi & 1/2 + \alpha_{11} \cos \xi \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha_{00} & 0 \\ 0 & 1/4 + \alpha_{11}/2 \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha_{00} = 1/2$ et $\alpha_{11} \in (-3/2, 1/2)$, alors la condition E est vérifiée et le schéma d'Hermite correspondant est \mathcal{D}' -convergent. Nous avons

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha_{00} & 0 \\ \alpha_{10}/2 & 1/2 + \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

Pour tout schéma, la distribution vectorielle limite T à composantes T_0, T_1 vérifie $T_1 = \alpha_{10}/(1 - 2\alpha_{11})T_0'$ comme nous l'avons montré dans le théorème 16.

Un cas particulier de schéma \mathcal{D}' -convergent est le schéma résultant de l'interpolation habituelle d'Hermite par des cubiques sur chaque intervalle $[\alpha, \alpha + 1]$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, à partir des données y_α, y'_α pour f, f' . Dans ce cas,

$$(\alpha_{jk}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/8 \\ 3/2 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

La condition E est vérifiée.

Exemple 3. Schémas d'ordre 2

Nous avons alors

$$B(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} e^{-i\alpha\xi} A_\alpha/2 = D \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha_{00} \cos \xi & i\alpha_{01} \sin \xi & \alpha_{02} \cos \xi \\ i\alpha_{10} \sin \xi & 1/2 + \alpha_{11} \cos \xi & i\alpha_{12} \sin \xi \\ \alpha_{20} \cos(\xi) & i\alpha_{21} \sin \xi & 1/2 + \alpha_{22} \cos \xi \end{pmatrix}.$$

Si bien que

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha_{00} & 0 & \alpha_{02} \\ 0 & 1/4 + \alpha_{11}/2 & 0 \\ \alpha_{20}/4 & 0 & 1/8 + \alpha_{22}/4 \end{pmatrix}, B'(0) = i \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & 0 \\ \alpha_{10}/2 & 0 & \alpha_{12}/2 \\ 0 & \alpha_{21}/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dès que la condition E est vérifiée, i.e.

$$\alpha_{00} = 1/2, -3/2 < \alpha_{11} < 1/2, -3/2 < \alpha_{22} < 1/2, \alpha_{20} = 0,$$

alors par le théorème 25 le schéma est \mathcal{D}' -convergent.

Dans ce cas,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{10}/2 & 1/2 + \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{21}/2 & 1/2 + \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Toute distribution vectorielle limite $T = (T_0, T_1, T_2)^T$ vérifie $T_1 = T_0', T_2 = T_0''$ si et seulement si $\alpha_{10} + 2\alpha_{11} = \alpha_{21} + 2\alpha_{22} = 1$ comme nous l'avons montré dans les théorèmes 16 et 17.

Pour certaines valeurs des paramètres, nous pouvons interpoler les données sur \mathbb{Z} par une fonction f polynomiale ou par une fonction polynomiale par morceaux (splines) sur chaque intervalle $[\alpha, \alpha + 1], \alpha \in \mathbb{Z}$. Par exemple :

1. Pour

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -5/32 & 1/64 \\ 15/8 & -7/16 & 1/32 \\ 0 & 3/2 & -1/4 \end{pmatrix},$$

alors f est la quintique interpolante d'Hermite sur chaque $[\alpha, \alpha + 1], \alpha \in \mathbb{Z}$;

2. Pour

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -23/144 & 5/288 \\ 9/4 & -5/8 & 1/16 \\ 0 & 3/2 & -1/4 \end{pmatrix},$$

alors f est la spline cubique à deux noeuds situés au $1/3$ et $2/3$ de chaque intervalle $[\alpha, \alpha + 1]$;

3. Pour

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -5/32 & 1/64 \\ 2 & -1/2 & 1/24 \\ 0 & 3/2 & -1/4 \end{pmatrix},$$

f est la spline quartique à un noeud au milieu de chaque intervalle $[\alpha, \alpha + 1]$.

Dans chacun des cas précédents, la condition E est vérifiée. Par ailleurs, une étude de la convergence C^2 est donnée dans [21].

Exemple 4. Schémas d'ordre 3

Dans ce cas,

$$B(0) = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha_{00} & 0 & \alpha_{02} & 0 \\ 0 & 1/4 + \alpha_{11}/2 & 0 & \alpha_{13}/2 \\ \alpha_{20}/4 & 0 & 1/8 + \alpha_{22}/4 & 0 \\ 0 & \alpha_{31}/8 & 0 & 1/16 + \alpha_{33}/8 \end{pmatrix},$$

$$B'(0) = i \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{01} & 0 & \alpha_{03} \\ \alpha_{10}/2 & 0 & \alpha_{12}/2 & 0 \\ 0 & \alpha_{21}/4 & 0 & \alpha_{23}/4 \\ \alpha_{30}/8 & 0 & \alpha_{32}/8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B''(0) = - \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 & \alpha_{02} & 0 \\ 0 & \alpha_{11}/2 & 0 & \alpha_{13}/2 \\ \alpha_{20}/4 & 0 & \alpha_{22}/4 & 0 \\ 0 & \alpha_{31}/8 & 0 & \alpha_{33}/8 \end{pmatrix}.$$

La condition E est vérifiée dès que $\alpha_{00} = 1/2, -3/2 < \alpha_{ii} < 1/2, i = 1, 2, 3$, et $\alpha_{20} = \alpha_{31} = \alpha_{30} = 0$. Dans ce cas le schéma est \mathcal{D}' -convergent, la matrice C est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{10}/2 & 1/2 + \alpha_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{21}/2 & 1/2 + \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{32}/2 & 1/2 + \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

et comme précédemment, toute distribution vectorielle limite $T = (T_0, T_1, T_2, T_3)^T$ vérifie $T_1 = T_0'$, $T_2 = T_0''$, $T_3 = T_0'''$ si et seulement si $\alpha_{10} + 2\alpha_{11} = \alpha_{21} + 2\alpha_{22} = \alpha_{31} + 2\alpha_{32} = 1$.

Venons-en au dernier exemple. Pour

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -11/64 & 3/128 & -1/768 \\ -21/16 & -19/32 & 1/16 & -1/384 \\ 0 & 15/8 & -7/16 & 1/32 \\ -105/2 & 105/4 & -15/4 & 3/16 \end{pmatrix},$$

alors l'interpolant d'Hermite f est le polynôme de degré 7 sur chaque intervalle $[\alpha, \alpha+1]$, $\alpha \in \mathbb{Z}$. Il est clair que le SSH est C^3 -convergent et donc \mathcal{D}' -convergent. Pourtant la condition E n'est pas vérifiée (il n'est pas vrai que $\alpha_{31} = 0$ et $\alpha_{30} = 0$).

10. Conclusion. Pour des SSH, la théorie des distributions de L. Schwartz est un outil exceptionnel d'étude, en particulier lorsqu'on le combine avec les transformées de Fourier. Nous avons pu proposer des conditions générales de convergence au sens des distributions pour tous les schémas d'ordre 1. Quand l'ordre est strictement plus grand que 1, nous avons proposé la condition E qui n'est pas la condition optimale pour la convergence au sens des distributions. La recherche de cette condition optimale reste une question ouverte

English extended abstract. A Hermite-type subdivision scheme (HSS) of order r is defined by a mask, a set of $(r+1) \times (r+1)$ matrix coefficients $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}$ with a finite number of non-zero A_α 's. The initial set of discrete data is a set of control vectors $\{f_0(\alpha) \in \mathbb{R}^{r+1}\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$. The sequence of refinements $\{f_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{r+1}\}$, $n \geq 0$ is defined recursively by:

$$D^{n+1} f_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} D^n f_n(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

where D is the diagonal matrix of order $r+1$ whose diagonal elements are the successive powers of $1/2$: $1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^r$.

A HSS converges in distribution if for any C^∞ -function with compact support, $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ and for any sequence f_n of refinements of the scheme, the sequence of vectors $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \varphi(\alpha/2^n) f_n(\alpha)/2^n$ converges.

The basic sequence of matrix distributions of a HSS is

$$M_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} F_n(\alpha)/2^n \delta_{\alpha/2^n},$$

where δ_a is the Dirac distribution at a and where F_n is recursively defined

$$D^{n+1} F_{n+1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} A_{\alpha-2\beta} D^n F_n(\beta), \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

with $F_0(\alpha) = \delta_{0\alpha} I$ (I is the identity matrix of order $r+1$). If this sequence of matrix distributions converges to a matrix distribution M , then M is called the *basic matrix distribution*.

The symbol of a HSS of mask $\{A_\alpha\}$ is $B(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} A_\alpha e^{-i\alpha\xi}/2$. We also use Schwartz notation for the translation operator τ_h , where h is a real number. If φ is a C^∞ function with compact support and if T is a distribution, then $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x - h)$ and $\tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi)$.

Theorem 8. *If the basic matrix distribution M exists for a HSS, then this scheme converges in distribution. More precisely, if f_n is the sequence of refinements of a HSS from the initial data f_0 , then the sequence of vector distributions*

$$T_n = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha)/2^n \delta_{\alpha/2^n}$$

converges to the vector distribution

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} [\tau_\alpha M] f_0(\alpha)$$

in the space of distributions \mathcal{D}' . Conversely if the HSS converges in distribution, then the basic matrix distribution exists.

Corollary 11. *If a HSS with symbol B is \mathcal{D}' -convergent, then for any ξ , the sequence of matrix functions $D^{-n}B(\xi/2^n)B(\xi/2^{n-1}) \cdots B(\xi/4)B(\xi/2)$ converges (uniformly on any finite interval) to the Fourier transform of the basic matrix distribution, $\hat{M}(\xi)$. In particular the sequence of matrices $D^{-n}B(0)^n$ converges to $\hat{M}(0)$.*

Theorem 17. *Let M be the basic limit distribution of a HSS of order r which converges in distribution, let B be the symbol of the scheme, we assume that 1 is a simple eigenvalue of $B(0)$ and any other eigenvalue of $B(0)$ in $\{|\lambda| < 1\} \setminus \{1/2^n : n = 1, \dots, r\}$. Let $C = (c_{jk})$ be the lower triangular matrix whose lower part is*

$$c_{jk} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} 2^{k-1} a_{jk}(\alpha)/(j-k)!(-\alpha)^{j-k}, \quad j \geq k,$$

where $a_{jk}(\alpha)$ is the jk th-component of the mask A_α of the scheme. Then 1 is an eigenvalue of C and we can choose the corresponding eigenvector $(u_0, u_1, \dots, u_r)^T$ such that $u_0 = 1$. With this choice, the j -th row of M is u_j times the first row of M .

Theorem 25. *Let a HSS of order r whose symbol is $B(\xi) = (b_{jk}(\xi))$ such that*

- (i) $b_{00}(0) = 1$ and $|b_{jj}(0)| < 1/2^j$, $j = 1, \dots, r$,
- (ii) if $j > k$, then $b_{jk}^{(\ell)}(0) = 0$ for $\ell = 0, \dots, j - k - 1$,

then the scheme converges in distribution.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. S. Cavaretta, W. Dahmen and C. A. Micchelli, *Stationary subdivision*, Mem. Amer. Math. Soc. **93** (1991); no. 453.
2. A. Cohen, N. Dyn and D. Levin, *Stability and inter-dependence of matrix subdivision schemes*, Advanced topics in multivariate approximation (Montecatini Terme, 1995), pp. 33–45; *Ser. Approx. Decom.*, vol. 8, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996.
3. A. Cohen, I. Daubechies and G. Plonka, *Regularity of refinable function vectors*, J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 295–324.

4. W. Dahmen, B. Han, R.-Q. Jia and A. Kunoth, *Biorthogonal multiwavelets on the interval: cubic Hermite splines*, *Constr. Approx.* **16** (2000), 221–259.
5. I. Daubechies and J. C. Lagarias, *Two-scale difference equations: I. Existence and global regularity of solutions*, *SIAM J. Math. Anal.* **22** (1991), 1388–1410; *II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals*, *SIAM J. Math. Anal.* **23** (1992), 1031–1079.
6. G. Derfel, N. Dyn and D. Levin, *Generalized refinement equations and subdivision processes*, *J. Approx. Theory* **80** (1995), 272–297.
7. S. Dubuc, D. Lemire and J.-L. Merrien, *Fourier analysis of 2-point Hermite interpolatory subdivision schemes*, *J. Fourier Anal. Appl.* **7** (2001), 537–552.
8. S. Dubuc and J.-L. Merrien, *A 4-point Hermite subdivision scheme*, *Mathematical methods for curves and surfaces* (Oslo, 2000), pp. 113–122; *Innov. Appl. Math.*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2001.
9. N. Dyn and D. Levin, *Analysis of Hermite-type subdivision schemes*, *Approximation Theory VIII*, Vol. 2 (College Station, TX, 1995), pp. 117–124; *Ser. Approx. Decompos.*, vol. 6, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.
10. N. Dyn and D. Levin, *Analysis of Hermite-interpolatory subdivision schemes*, *Spline functions and the theory of wavelets* (Montreal, PQ, 1996), pp. 105–113; *CRM. Proc. Lecture Notes*, vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
11. I. Fleischer and A. Joffe, *Behaviour of infinite products with applications to nonhomogeneous Markov chains*, *Doebelin and modern probability* (Blaubeuren, 1991), 179–187; *Contemp. Math*, vol. 149, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
12. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized functions*, *Spaces of fundamental and generalized functions*, vol. 2, Academic Press, New York-London, 1968.
13. B. Han, *Approximation properties and construction of Hermite interpolants and biorthogonal multiwavelets*, *J. Approx. Theory* **110** (2001), 18–53.
14. B. Han, *Vector cascade algorithms and refinable function vectors in Sobolev spaces*, *J. Approx. Theory* **124** (2003), 44–88.
15. C. Heil and D. Colella, *Matrix refinement equations: existence and uniqueness*, *J. Fourier Anal. Appl.* **2** (1996), 363–377.
16. C. Heil, G. Strang and V. Strela, *Approximation by translates of refinable functions*, *Numer. Math.* **73** (1996), 75–94.
17. L. Hervé, *Multi-resolution analysis of multiplicity d : applications to dyadic interpolation*, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **1** (1994), 299–315.
18. J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions*, vol. 1, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.
19. R. Q. Jia, S. D. Riemenschneider and D. X. Zhou, *Approximation by multiple refinable functions*, *Canad. J. Math.* **49** (1997), 944–962.
20. J.-L. Merrien, *A family of Hermite interpolants by bisection algorithms*, *Numer. Algorithms* **2** (1992), 187–200.
21. J.-L. Merrien, *Interpolants d'Hermite C^2 obtenus par subdivision*, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **33** (1999), 55–65.
22. R. Oldenburger, *Infinite powers of matrices and characteristic roots*, *Duke Math. J.* **6** (1940), 357–361.
23. W. Rudin, *Functional analysis. Second edition*, *International Series in Pure and Applied Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1991.
24. L. Schwartz, *Théorie des distributions, tomes 1 et 2*, Hermann, Paris, 1966.
25. B. Sendov and A. Andreev, *Approximation and interpolation theory*, *Handbook of numerical analysis*, vol. III, pp. 223–462; *Handb. Numer. Anal.*, vol. III, North-Holland, Amsterdam, 1994.

26. G. Strang and V. Strela, *Orthogonal multiwavelets with vanishing moments*, J. Optical Eng. **33** (1994), 2104–2107.
27. D.-X. Zhou, *Existence of multiple refinable distributions*, Michigan Math. J. **44** (1997), 317–329.
28. D.-X. Zhou, *Multiple refinable Hermite interpolants*, J. Approx. Theory **102** (2000), 46–71.

S. DUBUC

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE

MONTRÉAL QC H3C 3J7

CANADA

COURRIEL : dubucs@dms.umontreal.ca

J.-L. MERRIEN

INSA DE RENNES

20 AVENUE DES BUTTES DE COËSMES, CS 14315

35043 RENNES CEDEX

FRANCE

COURRIEL : Jean-Louis.Merrien@insa-rennes.fr