INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

4 ième année EII

Année universitaire 2014-2015
Devoir Surveillé ANALYSE NUMÉRIQUE
Mardi 14 janvier 2015 — durée : 3h
Nom et prénom :

Document et appareil électronique interdits

Exercice 1 :

Considérons la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & -8 & 5 \\ 3 & -8 & 14 & -4 \\ -4 & 5 & -4 & 29+\alpha \end{bmatrix}$. Déterminer la factorisation de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^T \times \boldsymbol{C}$ avec $\boldsymbol{C}$ triangulaire supérieure lorsqu'elle est possible (en précisant la condition sur α pour qu'elle soit possible).

Exercice 2 :

Soit E, l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$.

1. Montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$ définit un produit scalaire sur E.
2. On considère $\{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$ une base de $\mathbb{P}_n$, espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

   Soit $f \in E$. Montrer que les coefficients $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_0, \dots, \alpha_n]^T$ de $p_{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \pi_j(t)$, qui minimise $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(f(t) - p_{\boldsymbol{\alpha}}(t)\big)^2 dt$ sont solutions d'un système $\boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ sont à préciser.
3. On souhaite construire une base orthonormée, $\{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}$ de $\mathbb{P}_2$ avec $\pi_j \in \mathbb{P}_j$.
   (a) Déterminer $\pi_0 \in \mathbb{P}_0$ avec $\pi_0 > 0$ (Une équation : $< \pi_0, \pi_0 >= 1$).
   (b) Déterminer $\pi_1 \in \mathbb{P}_1$ avec coefficient de x positif (Deux équations).
   (c) Déterminer $\pi_2 \in \mathbb{P}_2$ avec coefficient de x^2 positif (Trois équations).
4. Écrire la matrice $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dans ce cas.
5. Pour $f_1(t) = t^3$ déterminer $\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$ ou p_{α_1} correspondant.
6. Idem avec $f_2(t) = t^2$.

Exercice 3 : Si $\boldsymbol{y} = \| : y_0, y_1, \dots, y_{n-1} : \|$ est une suite périodique de période n, on rappelle que la transformée de Fourier discrète est définie par $\boldsymbol{z} = TFD(\boldsymbol{y})$ avec $z_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \omega^{k\ell}$ où $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Montrer que si $n = 2m$ alors pour $k = 0, \dots, m-1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_k & = & P_k + \omega^k Q_k, \\ z_{k+m} & = & P_k - \omega^k Q_k \end{array} \right.$$

   en précisant P_k et Q_k.

2. Ecrire alors l'algorithme récursif $\boldsymbol{z} = FFT(\boldsymbol{y})$ de la transformée de Fourier rapide si $n = 2^p$.

Exercice 4 : Pour $I := [t_0, t_0+T] \subset \mathbb{R}$, soit $f \in C(I\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie une condition de Lipschitz par rapport la seconde variable i.e. il existe $L \in \mathbb{R}$

$$\forall u, \bar{u} \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad |f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq L|u - \bar{u}|.$$

On considére le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& f(t, y(t)),\ t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) &=& \eta \end{array} \right. \tag{1}$$

qui admet une solution unique notée $y(t)$.

Pour approcher (1), le schéma numérique est définie sur une subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = T/n$ et $t_i = t_0 + ih$ pour $i = 0, \ldots, n$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 &=& \eta, \\ u_1 &=& u_0 + hf(t_0, u_0), \\ u_{i+1} &=& u_{i-1} + 2hf(t_i, u_i) \text{ pour } i = 1, \ldots, n. \end{array} \right.$$

1. Montrer que $|u_1 - y(t_1)| \leq c_2 h^2$ où c_2 est une constante dépendant de $\sup_{x\in I} |y^{(2)}(x)|$ à préciser.

2. Soit $\epsilon(t,h) = y(t+h) - y(t-h) - 2hf(t, y(t))$. Montrer que $|\epsilon(t,h)| \leq c_1 h^3$ où c_1 est une constante dépendant de $\sup_{x\in I} |y^{(3)}(x)|$ à préciser.

3. Si
$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_0 &=& u_0 + \xi_0, \\ v_1 &=& u_1 + \xi_1, \\ v_{i+1} &=& v_{i-1} + 2hf(t_i, v_i) + \mu_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n, \end{array} \right.$$
et $\theta_j = \max(|u_j - v_j|, |u_{j-1} - v_{j-1}|)$ pour $j = 1, \ldots, n$ (donc $\theta_1 = \max(|\xi_0|, \xi_1|)$).
Montrer que $\theta_{i+1} \leq (1 + 2Lh)\theta_i + |\mu_i|$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

4. *On rappelle le Lemme de Gronwall : Si (a_j) et (b_j) sont deux suites de réels telles que $a_{j+1} \leq (1+\alpha)a_j + b_j$ pour $j = 0, \ldots$ alors $a_j \leq e^{j\alpha}a_0 + \sum_{k=0}^{j-1} e^{(j-k-1)\alpha} b_k$ pour $j = 0, 1, \ldots$.*
En déduire que $\theta_i \leq M\left(\theta_1 + \sum_{k=1}^{i-1} |\mu_k|\right)$ pour $i = 1, \ldots, n$, en précisant M. Ainsi la méthode est stable.

5. En prenant $v_j = y(t_j)$, déterminer l'erreur $\max_{i=0,\ldots,n} |u_j - y(t_j)|$ en fonction de h et préciser ainsi l'ordre de la méthode.