4 ième année EII

Année universitaire 2014-2015
CONTRÔLE TP ANALYSE NUMÉRIQUE
Mercredi 15 janvier 2015 — durée : 2h

1 Une méthode de Runge-Kutta

Soit f une fonction définie et continue de $[a,b]\times\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lipschizienne par rapport à la seconde variable et soit $\boldsymbol{Y} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$, la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) = f(t,\boldsymbol{Y}(t)), \\ \boldsymbol{Y}(a) = \eta, \qquad \text{où} \quad \eta \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{1}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $h = \dfrac{b-a}{n}$ et $t_i = a + (i-1)h$, pour $i = 1,\dots,n+1$, une subdivision uniforme de $[a,b]$. Pour résoudre le problème (1), nous considérons le schéma de Runge-Kutta suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 &= \eta \\ \boldsymbol{u}_{i+1} &= \boldsymbol{u}_i + hf\left(t_i + \dfrac{h}{2}, \boldsymbol{u}_i + \dfrac{h}{2} f(t_i,\boldsymbol{u}_i)\right), \quad ,i=1,\dots,n \end{cases}$$

$\boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^m$ est la valeur approchée de $\boldsymbol{Y}(t_i)$.

Pour étudier cette méthode numérique, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) &= f1\big(t,\boldsymbol{Y}(t)\big),\ t\in[0,1], \\ \boldsymbol{Y}(0) &= [0,3,1]^T. \end{cases}$$

où $f1(t,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(t)$ avec $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} -2t-4 \\ 3t+6 \\ -16t-16 \end{bmatrix}$.

La solution exacte est donnée par $\boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} -2e^t + t + 2 \\ 4e^t - t - 1 \\ 40(e^t - e^{2t}) + 2t + 1 \end{bmatrix}$.

1. Ecrire une fonction `f1.m` calcuant $f_1(t,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b}(t)$. Test `f1(0.3,[1 2 3]')`.

```
>> f1(0.3,[1 2 3]')
ans =
     0.4000
     0.9000
   -26.8000
```

2. Ecrire une fonction `solex.m` calculant $\boldsymbol{Y}(t)$ donc un tableau à 3 lignes et autant de colonnes que le nombre de composantes de t. Test `solex([0.1,0.5])`.

```
>> solex([0.1,0.5])
ans =
   -0.1103   -0.7974
    3.3207    5.0949
   -3.4493  -40.7824
```

3. Écrire une fonction `RK·m` qui prend en paramètres d'entrée `fichier` le nom du fichier contenant f, `interv`, un vecteur à 2 composantes : les deux bornes de l'intervalle d'intégration, `eta`, la condition initiale qui est donc un vecteur à m composantes et `n` le nombre de subdivision et en sortie le vecteur t et $\boldsymbol{U}$ un tableau à m lignes et $n+1$ colonnes représentant les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\dots,n+1$. Test `[t,U]=RK('f1',[0 1],[0;3;1],5)`.

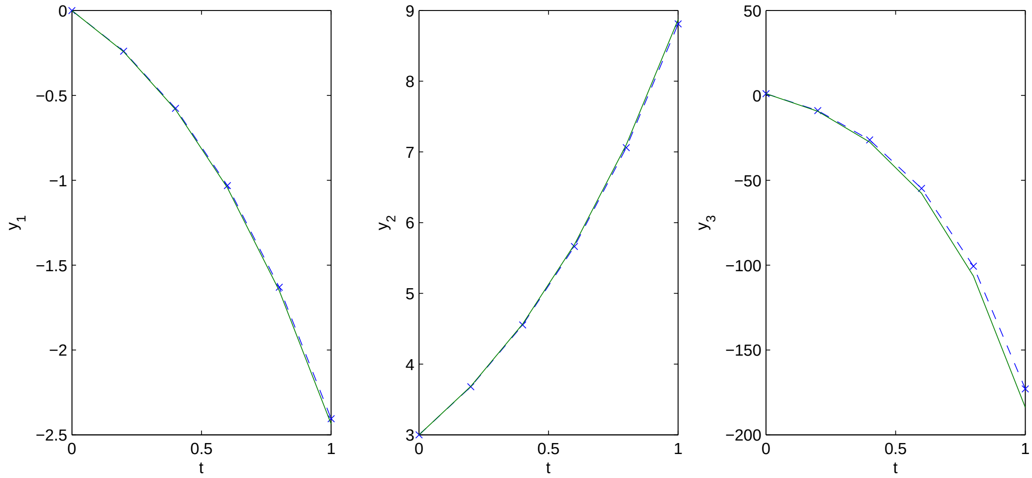

Figure 1: Solutions exactes et approchées du système

```
>> [t,u]=RK('f1',[0 1],[0;3;1],5)
t =
           0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000
u =
           0   -0.2400   -0.5768   -1.0317   -1.6307   -2.4054
      3.0000    3.6800    4.5536    5.6634    7.0613    8.8108
      1.0000   -9.0000  -26.2800  -54.8378 -100.7007 -172.9245
```

4. Écrire un programme `VI1.m` (où VI sont vos initiales) qui calcule solutions exactes et solutions approchées et trace ces solutions. Test avec $[a,b] = [0,1]$, $n = 5$, $\eta = [0,3,1]'$ et $f1$. Voir Figure 1.

5. Etendre le programme avec, pour n donné, le calcul de `err1`,

$$err1 = \max_{j=1\ldots n+1} \|\boldsymbol{U}_j - \boldsymbol{Y}(t_j)\|_\infty = \max_{j=1\ldots n+1} \max_{i=1,2,3} |u(i,j) - y_i(t_j)|$$

où $\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ est la solution exacte. Sauvegarder sous `VI2·m`. Test avec $n = 5$.

```
>> VI1
n =
     5
err1 =
    10.9064
```

6. Etudier l'erreur quand n varie. On partira du tableau de valeurs de n, `arrn`$= 100 : 1 : 110$ et on construira un tableau des erreurs `arrerr` puis on tracera log(`arrerr`) en fonction de log(`arrn`). Sauvegarder sous `VI3·m`. Déduire l'ordre de la méthode (indiquer en commentaire en fin du fichier).

2 Mouvement d'un objet attaché à un ressort

Un corps B de masse m est posé sur un plan horizontal sans friction et attaché à un ressort lui même fixé au mur (voir Figure 2). Nous supposons que tous les mouvements de B ont lieu

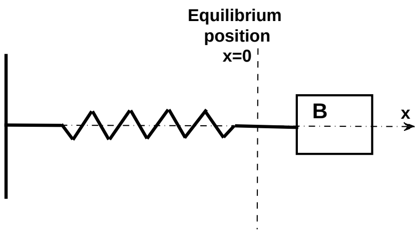

Figure 2: Mur-Ressort-Corps.

suivant un axe x orthogonal au mur. Le ressort exerce alors une force sur B s'il est tendu ($x > 0$) ou comprimé ($x < 0$), force qui ramène B vers sa position d'équilibre $x = 0$. Nous supposons que cette force est de la forme $-kx + x^3$, où $k > 0$ est une constante. Si $x(t)$ est la position de B à l'instant t, par la seconde loi de Newton,

$$mx''(t) = -kx(t) + x^3(t).$$

Dans la suite nous supposons $m = 1$, $k = 1$. La vitesse est notée $z(t) = x'(t)$, si bien que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & z(t), \quad t \in [0, b] \\ z'(t) & = & -x(t) + [x(t)]^3 \end{array}\right. \tag{2}$$

avec les conditions initiales $x(0) = \alpha$ et $z(0) = x'(0) = \beta$.

Rappelons que l'énergie cinétique de B est $T(t) := \dfrac{1}{2}z(t)^2$ et l'énergie potentielle du ressort $V(t) := \dfrac{1}{2}x(t)^2 - \dfrac{1}{4}x(t)^4$; il est possible de montrer que $E(t) := T(t) + V(t) = E(0)$ donc $E(t)$ ne dépend pas de t.

1. Écrire (2) sous la forme $\boldsymbol{y}'(t) = f_2(t, \boldsymbol{y}(t))$ où $f_2 : [0, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$.

2. **Programmes:** Écrire une fonction `f2.m`.

```
>> f2(1,[1,3]')
ans =
     3
     0
```

3. Écrire un programme `VI4.m` qui calcule $\boldsymbol{u}$, une approximation de $\boldsymbol{y}$ en utilisant la méthode RK précédente sur une partition uniforme. Test : $b = 15$, $n = 50$, $\boldsymbol{\eta} = [0.2; 0.5]$. Afficher $\boldsymbol{u}(1, n + 1)$.

```
>> VI4
n =
     50
ans =
     0.3782
```

4. Si $Eapp(i)$ est l'approximation de $E(t_i) = T(t_i)+V(t_i)$ obtenue à partir des approximations de $x(t_i)$ et $z(t_i)$, compléter `VI4.m` en un programme `VI5.m` qui calcule $Eapp$, trace le graphe de $Eapp$ en fonction de t sur léchantillonage, calcule et affiche l'erreur $err = \max_{i=2,\ldots,n+1} |Eapp(i) - Eapp(1)|$. Test sur $I = [0, 15]$ avec $n = 100$, $\boldsymbol{\eta} = [0.2; 0.5]$.

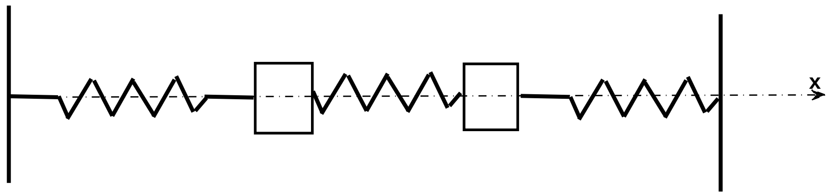

Figure 3: Mur-Ressort-Corps-Ressort-Corps-Ressort-Mur.

5. Écrire un programme `VI6.m` pour étudier cette erreur. Test sur $I = [0, 15]$ et $\boldsymbol{\eta} = [0.2; 0.5]$ et un tableau de valeurs de n $arrn = 100 : 10 : 300$.

3 Multi ressorts

Maintenant, on étudie un système mécanique composé de deux corps de masse $m_1 = 1$ et $m_2 = 1$, alignés et situés dans un plan. Leurs positions par rapport à l'equilibre sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et ils sont reliés à trois ressorts de raideur k_j, $j = 1, 2, 3$, le premier et le dernier étant attachés á deux murs opposés. (voir Figure 3).

Chaque corps est de plus soumis à une force extérieure $g_i(t)$ et à une force de frottement $-c_i x_i'(t) - d_i {x_i'}^3(t)$ avec $c_i, d_i > 0$. Le système s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1''(t) & = & -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) - c_1 x_1'(t) - d_1 {x_1'}^3(t) + g_1(t) \\ x_2''(t) & = & -(k_2 + k_3)x_2(t) + k_2 x_1(t) - c_2 x_2'(t) - d_2 {x_2'}^3(t) + g_2(t) \end{array} \right. \quad t \in [0, b] \tag{3}$$

avec des conditions initiales $x_i(0) = \alpha_i$, $x_i'(0) = \beta_i$ pour $i = 1, 2$.

Dans la suite, on suppose que $k_1 = k_2 = k_3 = 1/2$, $c_1 = -c_2 = 1/2$, $d_1 = 2 = -d_2$, $g_1(t) = 2\cos^3(t)$, $g_2(t) = 2\sin^3(t)$.

Après avoir écrit les équations sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{Y}'(t) & = & f_3(t, \boldsymbol{Y}(t)), \quad t \in [0, b] \\ \boldsymbol{Y}(0) & = & \boldsymbol{\eta} \end{array} \right. \tag{4}$$

où $\boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$, calculer une approximation $\boldsymbol{u}_i$ de $\boldsymbol{Y}(t_i)$ pour $i = 1, \dots, n+1$ sur une subdivision uniforme de $[0, b]$ et tracer solutions exactes et solutions approchées (`VI7.m`) puis étudier l'erreur (`VI8.m`) quand n varie. Test $b = 2$, conditions initiales : $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_2'(0) = 0$. La solution exacte est donnée par $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$.

suggestion $n = 10$ puis $arrn = 100 : 10 : 200$.