

NOM Prénom + code barre

**DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 4**  
**Vendredi 7 novembre 2014 — durée : 1h30**

*Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits.  
Le sujet comporte 4 pages. Cette copie n'est pas un brouillon !*

**Exercice 1.** Cocher une case à tort sera pénalisé.

1.1. Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  Vrai  Faux

1.2. Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge alors  $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  Vrai  Faux

1.3.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{10}}{e^n}$  converge.  Vrai  Faux

1.4.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{10} \sin n}{e^n}$  converge.  Vrai  Faux

1.5.  $\int_0^1 \sqrt{\frac{e^x - 1}{x^3}} dx$  converge.  Vrai  Faux

1.6. Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  converge alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  a un rayon de convergence  $R \geq 1$ .  
 Vrai  Faux

**Exercice 2.** Déterminer le rayon de convergence  $R$  des séries entières suivantes

2.1.  $\sum_{n=0}^{\infty} (n^3 - 2n^2)z^n$ ,

2.2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n + 4^n}$ ,

**Exercice 3. 2.1.** Soit  $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ . Montrer la convergence de  $I$ . (question de cours)

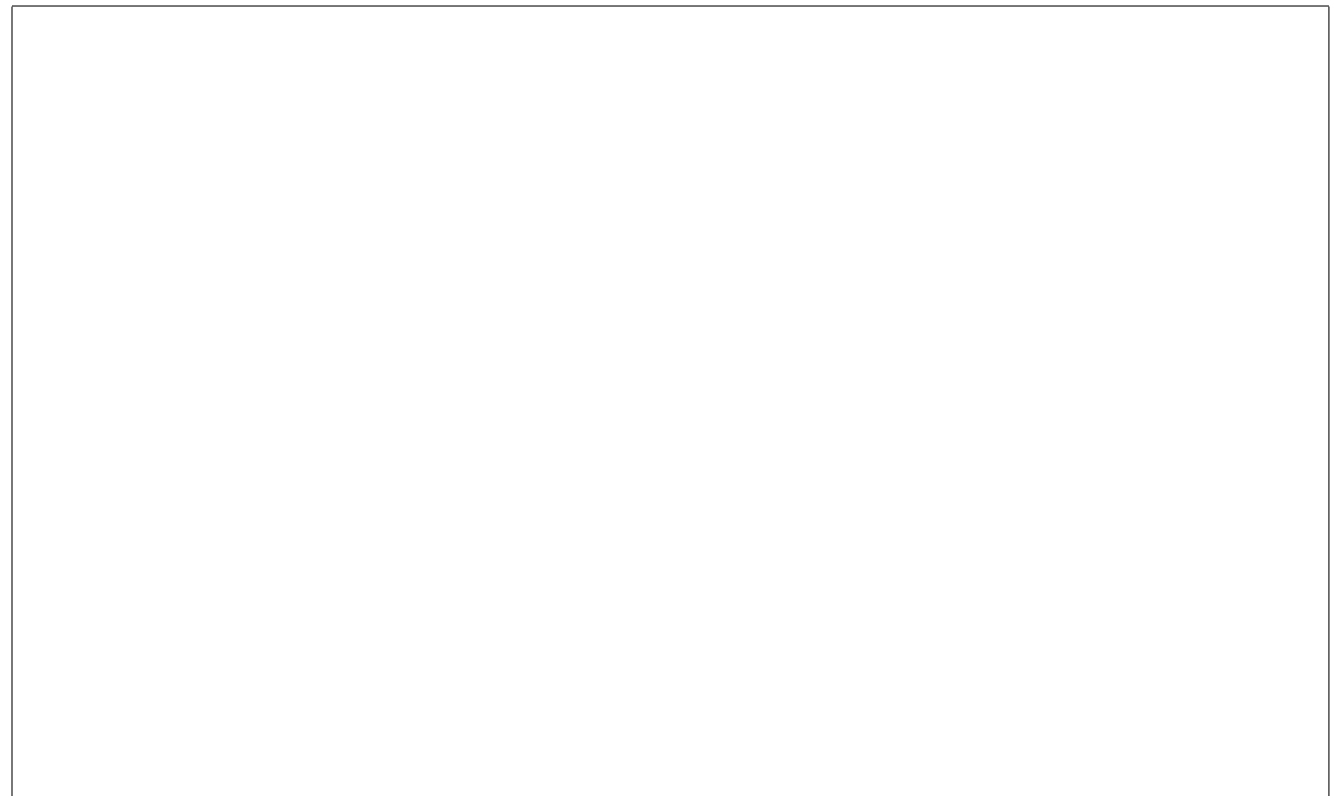
**2.2.** Calculer  $J = \int_0^1 \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$  et  $K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u^n)}{u} du$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , en fonction de  $I$ .

**Exercice 4.** Soit  $\varphi(z) = \frac{1}{2-z}$

**4.1.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , déterminer la partie réelle de  $\varphi(e^{ix})$ .



**4.2.** Déterminer le développement en série entière de  $\varphi(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , en précisant le rayon de convergence.



**Tournez svp**

