

NOM Prénom + code barre

**DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3**  
**Mercredi 9 novembre 2016 — durée : 1h30**

*Tous documents et matériels électroniques interdits.*  
*Travailler avec un brouillon avant de rédiger !*

**Exercice 1.** Nature des intégrales et séries ci-dessous. "CV" : converge, "DV" : diverge.  
Cocher une case à tort sera pénalisé.

1.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$        CV       DV

2.  $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-1/n}$        CV       DV

3.  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$        CV       DV

4.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}$        CV       DV

5.  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$        CV       DV

6.  $\int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx$        CV       DV

**Exercice 2.** Développer en série entière  $\frac{1}{4-x}$  en précisant le rayon de convergence.

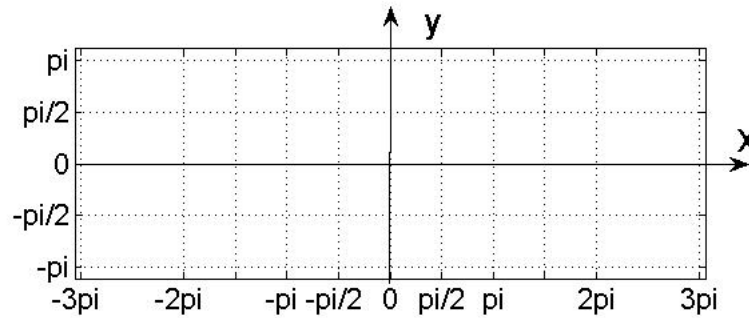
**Exercice 3.** Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

**Exercice 4.** Soit  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  de la série entière.

Sur  $] -R, R[$ , calculer  $f''(x) - 2xf'(x) - 3f(x)$  en fonction de  $f(x)$ . *Ne pas détailler les calculs car la rédaction doit tenir dans le cadre ci dessous.*

**Exercice 5.** Calculer  $u_0 = \int_0^\pi x dx$ ,  $u_n = \int_0^\pi x \cos(nx) dx$ ,  $v_n = \int_0^\pi x \sin(nx) dx$  pour  $n \geq 1$ .

Soit  $f$  la fonction  $2\pi$  périodique définie par  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } -\pi < x < 0, \\ bx & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ . Graphe de  $f$  pour  $a = -1/2$  et  $b = 1$ .



Cas général. Déterminer les coefficients de Fourier de  $f$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $u_n$  et  $v_n$ .

**Exercice 6.** Soit  $(d_n)$  une suite d'entiers entre 0 et 9. Montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$  converge

Ecrire alors  $a := 7,77\dots7\dots$  sous la forme d'une série et montrer que  $a$  est rationnel.