AROM-GM-3

Année universitaire 2015–2016
23/10/2015
Durée : 2h00

EXAMEN : INTRODUCTION AUX LOGICIELS MATHEMATIQUES

Seuls les notes prises en TD et les documents distribués en TD sont autorisés.

Exercice 1 `Logiciel MATLAB` :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Pour un entier n non nul donné, soit $h = \dfrac{b-a}{n}$. On construit la subdivision uniforme $x_i = a+h/2+(i-1)h$ pour $i = 1,\dots,n$ et on calcule les ordonnées $y_i = f(x_i)$ correspondantes. L'objectif est d'approcher $I = \int_a^b f(t)dt$ par la formule du point milieu

$$J(f,a,b,n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

1. Ecrire un fichier "function" `f.m` qui contiendra la fonction f. Exemple $f(x) = e^x$.

```
>> f([0.5 1])
ans =
     1.6487     2.7183
```

2. Ecrire une fonction `mil.m`, qui permettra le calcul approché de l'intégrale, paramètres : `J=mil(namefun,a,b,n)`. Test avec $a = 0,\ b = 1,\ n = 10$. *boucle interdite !*

```
>> J=mil('f',0,1,10)
J =
     1.7176
```

3. L'erreur est $|J(f,a,b,n) - I\ |$. En faisant varier n, étudier $\log|J(f,a,b,n) - I\ |$ en fonction de $\log(n)$ (il s'agit du logarithme habituel). On tracera en particulier la courbe correspondante. $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = e^x$.

   Pour cette étude, on partira d'un tableau $arrn = [10, 15, 20, 35, 50, 75, 100]$ et on construira le tableau correspondant $arrerr$ puis on dessinera $\log(arrerr)$ en fonction de $\log(arrn)$. Sauvegarde dans `VI1.m` où `VI` sont vos initiales. Indiquez en commentaire l'ordre de la méthode, c'est à dire le coefficient α tel que $erreur \simeq C/n^\alpha$.

4. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - 1$. On souhaite résoudre l'équation $F(x) = 0$ par la méthode de Newton en approchant le calcul de l'intégrale par la méthode du point milieu pour un n donné, donc en construisant la suite $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{J(f,0,x_k,n) - 1}{f(x_k)}\,, k = 0,1,2,\dots$$

   Ecrire un programme qui, pour la fonction f précédente, étant donné n et x_0, un nombre maximum d'itérations $maxiter$ et une précision $precis$ calcule les termes de la suite x_k tant que $k \leq maxiter$ et $|J(f,0,x_k,n) - 1| > precis$. Sauvegarde dans `VI2.m`. Test avec $n = 10$, $maxiter = 20$, $precis = 10^{-12}$, $x_0 = 0$. Afficher la dernière valeur x_k calculée.

5. La solution exacte de $F(x) = 0$ est $x = \log(2)$. Faire une étude de l'erreur entre la solution approchée obtenue par l'intégration numérique et la solution exacte en fonction de n. On partira d'un tableau $arrn = [20, 35, 50, 75, 100, 200, 500, 1000]$ et, pour chaque valeur de n, $maxiter = 20$, $precis = 1e-12$, $x_0 = 0$. Graphe puis conclusion en commentaire. Sauvegarde sous `VI3.m`.

Exercice 2 `Logiciel R`

- *Votre code R sera enregistré dans un seul script sous le nom* `R_Nom_Prenom.r`.
- *Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.*

1. Le jeu de données `etudiants` sur lequel vous allez travailler porte sur le nombre d'étudiants inscrits en 2006 dans les universités de cinq académies dans les quatre filières suivantes : Lettres, Sciences, Médecine et Sport.

   (a) Copier-coller le fichier `etudiants.txt` situé dans le répertoire public `X:/GM-345/GM 3A/IntroLogiciels/TPnote` dans votre répertoire de travail.
   Lire le fichier `etudiant.txt` et stocker son contenu dans un data.frame nommé `tab`. Préciser le nom des lignes qui sont dans l'ordre : `Bordeaux`, `Lyon`, `Paris`, `Rennes` et `Toulouse`.

   (b) On dispose également du nombre d'étudiants inscrits en 2006 dans la filière `IUT`. Ils étaient 2239 à Bordeaux, 3111 à Lyon, 7629 à Paris, 4013 à Rennes et 3178 à Toulouse.
   Compléter le tableau `tab` afin d'y faire figurer les informations sur la filière `IUT`.

   (c) Calculer le nombre total d'étudiants dans chaque académie puis ordonner le tableau de données `tab` par ordre croissant de cette variable.

   (d) Créer un data-frame qui contient seulement les académies pour lesquelles l'effectif en sciences est supérieur à l'effectif en sport.

   (e) Créer un tableau `pourcentage` donnant, pour chaque filière, le pourcentage d'étudiants venant de chaque académie.

2. Représenter sur un même graphique sur l'intervalle $[-3; 3]$:

   - la fonction $f(x) = x^2 + 1$ en rouge,
   - la droite d'équation $y = 0$ en bleu,
   - la fonction $g(x) = 2x + 2$ en vert,
   - la fonction $h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ x + 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 4x - 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en noir.

   Colorier en jaune l'aire comprise entre les 4 courbes représentatives.

3. (a) Écrire une fonction `puiss_mat` qui calcule la puissance n$^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée réelle.

   (b) Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.
   A l'aide de la fonction `puiss_mat`, vérifier que $\mathbf{A}^3$ est égal à la matrice nulle.

4. Écrire une fonction `bary` qui prend 3 arguments en entrée : `x`, `y`, `groupe`. Ces 3 arguments sont des vecteurs de longueur n, où n est le nombre d'observations. `x` et `y` sont les vecteurs de coordonnées des points et `groupe` est une variable de type facteur qui indique le groupe d'appartenance du point. La fonction doit rendre les coordonnées du barycentre de chaque groupe et afficher un

graphique sur lequel tous les points sont reliés au barycentre de leur groupe (Vous utiliserez la fonction `segments`.).

Par exemple,

```
x=c(5,8,1,6,4,1,4,7,3,6,2,2,7,2,7,3,9,7,5,0)
y=c(9,6,2,3,4,1,2,9,10,6,3,6,2,8,4,9,9,9,4,3)
groupe=factor(c("A","A","B","C","C","B","B","A","C","C","C","C","C","C","A","C","A","A","B","B"))
```