INSA

Centre de Mathématiques

Année universitaire 2015–2016
4 EII *Analyse numérique*
11/01/2016
durée : 3h

EXAMEN : METHODES NUMERIQUES

Documents, calculatrices et téléphones interdits.

Exercice 1 Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9/2 \\ 1 & 0 & 3/2 \\ 1 & 1 & -5/2 \\ 1 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer la matrice $\mathbf{R}$ de la factorisation $\mathbf{QR}$ de $\mathbf{A}$.
2. Calculer $\mathbf{R}^T \times \mathbf{R} - \mathbf{A}^T \times \mathbf{A}$.
3. Pouvait-on prévoir le résultat de la question 2 ?

Exercice 2 On rappelle que $\mathbb{P}_k$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k.
Soit $f(x) = |x^3|$ pour $x \in [-2, 2]$.
Pour $i = 1, \ldots, 5$, on considère les données suivantes $x_i = -2 + (i-1)$ et $y_i = f(x_i)$, soit

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	8	1	0	1	8

1. Déterminer le polynôme $\bar{p} \in \mathbb{P}_4$ qui vérifie $\bar{p}(x_i) = y_i$. On exprimera $\bar{p}$ dans la base canonique sachant que ce polynôme est pair pour des raisons de symétrie.
2. Déterminer le polynôme $\bar{q} \in \mathbb{P}_2$ qui minimise $\sum_{i=1}^{5}(q(x_i) - y_i)^2$ parmi tous les $q \in \mathbb{P}_2$.
3. Déterminer le polynôme $\bar{r} \in \mathbb{P}_2$ qui minimise $\int_{-2}^{2}(f(x) - r(x))^2\,dx$ parmi tous les $r \in \mathbb{P}_2$. On peut utiliser le produit scalaire sur $C^0([-2,2])$ défini par $< u, v >= \int_{-2}^{2} u(t)v(t)\,dt$.

Exercice 3 Pour $I := [t_1, t_1 + T] \subset \mathbb{R}$, soit $f \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie une condition de Lipschitz par rapport à la seconde variable i.e. il existe $L \in \mathbb{R}$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \forall t \in I, \quad |f(t,u) - f(t,v)| \le L|u - v|.$$

On considére le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& f(t, y(t)),\ t \in I = [t_1, t_1 + T] \\ y(t_0) &=& \eta \end{array} \right. \tag{1}$$

qui admet une solution unique notée $y(t)$.

Pour approcher (1), le schéma numérique est défini sur une subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = T/n$ et $t_i = t_1 + (i-1)h$ pour $i = 1, \ldots, n+1$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 &=& \eta, \\ u_{i+1} &=& u_i + h\Phi(t_i, h, u_i) \text{ pour } i = 1, \ldots, n. \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\Phi(t,h,u) = af\big(t,u\big) + bf\big(t+h, u+hf(t,u)\big)$, avec a et b deux constantes positives qui seront précisées.

Dans la première partie, nous étudions un exemple et dans la seconde la convergence de la méthode. Ces deux parties sont indépendantes.

Partie 1 :

On fixe $a = b = 1/2$.

On considère le problème

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & -100y(t) - 100t + 99,\ t \in I = [0,1] \\ y(0) & = & 1+\varepsilon \end{array}\right. \tag{3}$$

1. Déterminez la solution unique de (3), $y_{[\varepsilon]}$. On notera $u_{[\varepsilon],i}$ les approximations calculées par le schéma (2).

2. Précisez la fonction f associée à (3).

3. Montrer que

$$\begin{array}{lcl} y_{[0]}(t+h) & = & y_{[0]}(t) + hf\big(t, y_{[0]}(t)\big) \\ y'_{[0]}(t+h) & = & f\big(t+h, y_{[0]}(t) + hf(t, y_{[0]}(t)\big) \\ y_{[0]}(t+h) & = & y_{[0]}(t) + h\big[af\big(t, y_{[0]}(t)\big) + bf\big(t+h, y_{[0]}(t) + hf(t, y_{[0]}(t))\big)\big] \end{array}$$

4. Calculer alors $u_{[\varepsilon],i+1} - y_{[0]}(t_{i+1})$ en fonction de $u_{[\varepsilon],i} - y_{[0]}(t_i)$.

5. En déduire $u_{[\varepsilon],i} - y_{[0]}(t_i)$ en fonction de h et $u_{[\varepsilon],1} - y_{[0]}(t_1)$.

6. Application numérique : $n = 10$, $\varepsilon = 10^{-5}$. évaluer $|u_{[\varepsilon],n+1} - y_{[0]}(1)|$.

Partie 2 : Cas général

1. Montrer que pour tout a et b, il existe $\Lambda \in \mathbb{R}$ telle que $|\Phi(t,h,u) - \Phi(t,h,v)| \leq \Lambda|u-v|$. Ainsi la méthode est stable.

2. Soit $\epsilon(t,h) = \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Phi(t,h,y(t))$ où y est la solution de (1).

   En écrivant

$$\begin{array}{lcl} f\big(t+h, y(t) + hf(t,y(t))\big) & = & f\big(t+h, y(t+h)\big) \\ & & +\big[f\big(t+h, y(t) + hf(t,y(t))\big) - f\big(t+h, y(t+h)\big)\big] \end{array}$$

   déterminer une relation entre a et b pour que $\lim_{h\to 0} \epsilon(t,h) = 0$.

3. Dans la suite de cette partie, on prend $a = b = 1/2$. Montrer que $|\epsilon(t,h)| \leq M_1 h^2$ où M_1 est une constante à préciser.

4. Si

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & \eta, \\ v_{i+1} & = & v_i + h\Phi(t_i,h,v_i) + \mu_i \text{ pour } i = 1,\ldots,n, \end{array}\right.$$

   et $\theta_j = |u_j - v_j|$ pour $j = 0,\ldots,n$.

   Montrer que $\theta_{i+1} \leq (1+\Lambda h)\theta_i + |\mu_i|$ pour $i = 1,\ldots,n$.

5. *On rappelle le Lemme de Gronwall : Si* $(a_j)_{j=1,\dots}$ *et* $(b_j)_{j=1,\dots}$ *sont deux suites de réels positifs telles que* $a_{j+1} \leq (1+\alpha)a_j + b_j$ *pour* $j = 1, \dots$ *alors* $a_j \leq e^{(j-1)\alpha} a_0 + \sum_{k=1}^{j-1} e^{(j-k-2)\alpha} b_k$ *pour* $j = 0, 1, \dots$.

   En déduire que $\theta_i \leq M_2 \left(\theta_1 + \sum_{k=1}^{i-1} |\mu_k| \right)$ pour $i = 1, \dots, n$, en précisant M_2.

6. Majorer alors l'erreur $\max_{i=0,\dots,n} |u_j - y(t_j)|$ en fonction de h (rappel $\mu_k = h\epsilon(t_k, h)$) et préciser ainsi l'ordre de la méthode.