Centre de Mathématiques

Année universitaire 2015–2016
4 EII *Analyse numérique*
13/01/2016
durée : 2h

TP : METHODES NUMERIQUES

Notes personnelles et polycopié autorisés.

Intégration numérique

Soit $\phi \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. Dans cette partie, on approche l'intégrale $I = \int_x^{x+h} \phi(t)\, dt$ par $Iapp = \int_x^{x+h} p(t)\, dt$ où $p \in \mathbb{P}_2$ est le polynôme interpolant ϕ aux points $x-2h, x-h, x$. Après calculs, on obtient

$$Iapp = \frac{5}{12} h\phi(x-2h) - \frac{4}{3} h\phi(x-h) + \frac{23}{12} h\phi(x). \tag{1}$$

1. Construire une fonction `phi.m` calculant $\phi(x)$. Test avec $\phi(x) = \exp(x)$.

```
>> phi([0,1])
ans =
      1.0000      2.7183
```

2. Écrire une fonction `integnum.m` qui prend x et h en paramètres d'entrée et calcul $Iapp$. Test :

```
>> integnum(0,0.5)
ans =
      0.6306
```

3. En faisant varier h, étudier l'erreur $err = |I - Iapp|$ en fonction de h. Vous partirez d'un tableau $arrh = [1/2^i]_{i=1,\ldots,5}$ et vous construirez le tableau $arrerr$ correspondant, puis vous tracerez $\log(err)$ en fonction de $\log(h)$ pour ces valeurs et vous indiquerez en commentaire l'ordre de la méthode. Noter que $I = exp(h) - 1$. Programme sauvegardé sous `VI1.m` où VI sont vos initiales. Afficher $arrerr$.

```
>> VI1
arrerr =
      0.0181      0.0013      0.0001      0.0000      0.0000
```

Équation différentielle

Étant donnés $\eta \in \mathbb{R}^p$ et une fonction $f \in C^2([t_1, t_1+T] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p))$, on considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [t_1, t_1+T], \\ y(t_1) = \eta \end{cases} \tag{2}$$

pour lequel on va calculer une solution approchée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $h = T/n$ et la subdivision $t_i = t_1 + (i-1)h$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Le schéma numérique est alors

Initialisation

$$u_1 = \eta,\ v = u_1 + hf(t_1, u_1),\ u_3 = u_1 + 2hf(t_2, v),\ u_2 = u_1/4 + v/2 + u_3/4.$$

$$\textbf{Pour } i = 3, \dots, n$$
$$u_{i+1} = u_i + \frac{5}{12} h f(t_{i-2}, u_{i-2}) - \frac{4}{3} h f(t_{i-1}, u_{i-1}) + \frac{23}{12} h f(t_i, u_i).$$

Dans la suite, on s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{-y(t) + \cos(t)}{t+1}, \ t \in [0, 2], \\ y(0) = \eta = -1/4. \end{cases} \tag{3}$$

1. Écrire une fonction `f.m` (syntaxe `v=f(t,u)`) où f est la fonction correspondant à l'equation différentielle dans (3).

```
>> f(1,1)
ans =
   -0.2298
```

2. Écrire une fonction `adams.m` (syntaxe `[t,u]=adams(nomfichier,I,eta,n)` où "nomfichier" contient la fonction f, "I" est l'intervalle d'intégration, "eta" la condition initiale et "n" le nombre d'intervalles de subdivision). Test avec $n = 5$.

```
>> [t,u]=adams('f',[0,2],-1/4,5)
t =
         0    0.4000    0.8000    1.2000    1.6000    2.0000
u =
   -0.2500    0.0959    0.1335    0.2673    0.2318    0.1840
```

3. La solution exacte de (3) est $y(t) = \dfrac{\sin(t) - 1/4}{t+1}$. Écrire une fonction `yex.m` calculant $y(t)$. Test

```
>> yex([0:0.5:2])
ans =
   -0.2500    0.1530    0.2957    0.2990    0.2198
```

4. Écrire un programme qui calcule et trace solution exacte et solution approchée sur un même graphique. Sachant que l'erreur est définie par $err = \max\limits_{i=1,\dots,n+1} |y(t_i) - u_i|$), afficher aussi l'erreur. Sauvegarde sous `VI2.m`. Test avec $n = 5$ et données précédentes.

5. Étudier l'erreur en fonction de n en partant d'un tableau $arrn = [50 : 10 : 200]$), en construisant le tableau $arrerr$ correspondant. Indiquer l'ordre de la méthode. Sauvegarde sous `VI3.m`.

6. Reprendre l'étude avec le problème différentiel

$$\begin{cases} y''(t) = -y(t) + \cos(t), \ t \in [0, 2\pi], \\ y(0) = 5, \ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{4}$$

   transformé en un système différentiel $Y'(t) = F1(t, Y(t))$...

   Liste des fonctions et programmes demandés :

   - fonction `F1.m` telle que $Y'(t) = F1(t, Y(t))$.
   - fonction `yex1.m` qui donne la solution exacte $y1(t) = 5\cos(t) + \sin(t) + \frac{1}{2} t \sin(t)$.
   - fonction `adamssys.m` adaptée au système
   - programme `VI4.m` qui trace solutions approchée et exacte. Graphe et affichage de l'erreur pour $n = 12$.
   - programme `VI5.m` qui étudie l'erreur à partir de $arrn = 50 : 10 : 200$. Indiquer l'ordre.