INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

4 ième année EII

Année universitaire 2016-2017
Examen ANALYSE NUMÉRIQUE
Mardi 10 janvier 2017 — durée : 3h

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 : Considérons la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 9 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Déterminer la matrice $\boldsymbol{R}$ de la factorisation $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{Q}$ matrice orthogonale et $\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ avec $\boldsymbol{T}$ triangulaire supérieure.

On rappelle le théorême : *Sur $\mathbb{R}^m$ muni de la norme euclidienne usuelle, si $\boldsymbol{x}$ est un vecteur de norme 1, différent de $\mathbf{e} = [1, 0, \ldots, 0]^T$ alors il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, de norme 1 tel que $\boldsymbol{Hx} = \mathbf{e}$ où $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ et $\boldsymbol{u} = \gamma(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$ avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2(1 - x_1)}}$.*

Exercice 2 : En utilisant une méthode de moindres carrés, on souhaite approcher un nuage de m points du plan, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ par une ellipse centrée en $(0, 0)$ d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + d = 0$. Décrire la méthode, la(les) matrice(s) et l'(les) équation(s) possibles pour résoudre ce problème. Préciser en particulier la valeur minimum de m.

Exercice 3 : On considère le signal discret sur la subdivision uniforme de $[0, 1]$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_i	18	14	1	7	6	14	7	5	16	2	1	1	0	-4	-1	-7

1. Tracer le graphe sur la feuille jointe.
2. Calculer sa décomposition en ondelettes de Haar.
3. Filtrer en éliminant les coefficients dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 2 et reconstruire le signal filtré. Graphe sur la feuille jointe.

Ne pas oublier de mettre la feuille des graphes dans votre copie

Exercice 4 :

Pour n entier non nul, soit $x_i = i - 1$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. On considére le polynôme de Lagrange p_n qui vérifie $p_n(x_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $p_n(x_{n+1}) = 1$.

1. Déterminer p_4 en utilisant la base de Newton. On peut utiliser le graphe ci-dessous.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \to & y_1 & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
 & & & & [x_1, x_2] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 & \to & y_2 & & & & [x_1, x_2, x_3] & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
 & & & & [x_2, x_3] & & & & [x_1, x_2, x_3, x_4] & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
x_3 & \to & y_3 & & & & [x_2, x_3, x_4] & & & & [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & [x_3, x_4] & & & & [x_2, x_3, x_4, x_5] & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & \\
x_4 & \to & y_4 & & & & [x_3, x_4, x_5] & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & & [x_4, x_5] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
x_5 & \to & y_5 & & & & & & & &
\end{array}
$$

2. Généralisation $p_n =$.

Exercice 5 : Soit $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ b & 1-a \end{bmatrix}$. Déterminer les valeurs propres de $\boldsymbol{M}$ et ses vecteurs propres. La matrice est-elle diagonalisable ?

Mêmes questions avec $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1-a & b \\ -b & 1-a \end{bmatrix}$.

Exercice 6 : Pour $I := [t_0, t_0 + T] \subset \mathbb{R}^m$, soit $f \in C(I \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ qui vérifie une condition de Lipschitz par rapport la seconde variable i.e. il existe $L \in \mathbb{R}$

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m,\ \forall t \in I, \quad \|f(t, \boldsymbol{u}) - f(t, \boldsymbol{v})\| \leq L \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|.$$

On considére le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{y}'(t) & = & f(t, \boldsymbol{y}(t)),\ t \in I = [t_0, t_0 + T] \\ \boldsymbol{y}(t_0) & = & \boldsymbol{\eta} \end{array} \right. \tag{1}$$

qui admet une solution unique notée $\boldsymbol{y} : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^m$.

Pour approcher (1) et sa solution, le schéma numérique Runge-Kutta est définie sur une subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = T/n$ et $t_i = t_0 + ih$ pour

$i = 0, \ldots, n$

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_0 &= \boldsymbol{\eta}, \\ \boldsymbol{u}_{i+1} &= u_i + h\phi(t_i, \boldsymbol{u}_i, h) \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

où $\phi(t, \boldsymbol{u}, h) = f(t + h/2, \boldsymbol{u} + h/2 f(t, \boldsymbol{u}))$. Donc $\boldsymbol{u}_i$ est une approximation de $\boldsymbol{y}(t_i)$.

1. Pour simplifier les écritures, on suppose que $m = 1$ (une seule équation). Montrer que $|\phi(t, u, h) - \phi(t, v, h)| \leq M_1 |u - v|$ où M_1 est une constante à préciser. Ainsi la méthode est stable.

2. Soit $\epsilon(t, h) = \dfrac{y(t+h) - y(t)}{h} - \phi(t, y(t), h)$.
   Montrer que $|\epsilon(t, h)| \leq M_2 h^2$ où M_2 est une constante à préciser. Ainsi la méthode est d'ordre 2.

3. Désormais $m = 2$. Pour $t \in I = [0, T]$, on considère le problème

$$\begin{cases} y_1'(t) &= -2y_2(t), \\ y_2'(t) &= \dfrac{1}{2} y_1(t), \\ y_1(0) &= 2, \\ y_2(0) &= 0. \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Si $\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$, écrire le problème (2) sous la forme (1) en montrant que $f(t, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ où $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2$ sont à préciser.

   (b) Montrer alors que la suite des approximations vérifie

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i, \quad i = 0, n-1,$$

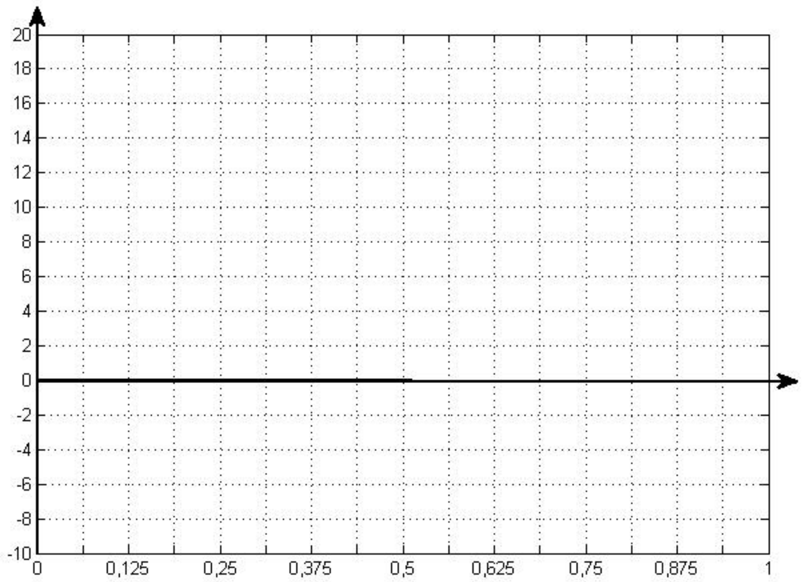
   où $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sera calculée en fonction de $\boldsymbol{A}$ et h. On peut ensuite montrer que $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 - h^2/2 & -2h \\ h/2 & 1 - h^2/2 \end{bmatrix}$.

   (c) On définit la norme sur $\mathbb{R}^2$, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + 4x_2^2}$ où $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^T$. Montrer que $\|\boldsymbol{u}_{i+1}\| = c(h)\|\boldsymbol{u}_i\|$ en précisant $c(h) \geq 1$.

   (d) Donner $p \in \mathbb{N}$ tel que l'erreur $\max_{i=0,\ldots,n} \|\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{y}(t_i)\| \leq M_3 h^p$.

Nom et prénom :

Signal initial



Signal filtré