4 ième année EII

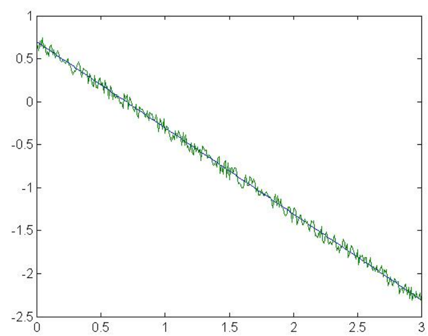
Année universitaire 2016-2017
CONTRÔLE TP ANALYSE NUMÉRIQUE
Vendredi 13 janvier 2017 — durée : 2h

Exercice 1 : Les valeurs $(x(i), y(i))_{i=1,\ldots,m}$ étant données, on cherche à approcher ce nuage de points par une fonction du type $y = \alpha e^{\lambda x}$.

1. Construire une fonction $Ep(alpha, lambda, x)$ calculant $\boldsymbol{y} = \alpha e^{\lambda \boldsymbol{x}}$ pour un tableau $\boldsymbol{x}$. La tester avec $\alpha = 2, \lambda = -1$, x sur l'intervalle $[0, 2]$ avec un pas uniforme de 0.5. Soit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ le jeu de données obtenu.

```
>> x=...
>> y=Ep(2,-1,x)
y =
    2.0000    1.2131    0.7358    0.4463    0.2707
```

2. On va construire maintenant un jeu de données bruitées. Bruiter le signal précédent à hauteur de 10%, c'est à dire entre 90% et 110% de chaque valeur de $\boldsymbol{y}$. Soient $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}b)$ le jeu de données obtenu. Calculer et tracer $(\boldsymbol{x}, \log(\boldsymbol{y}))$ et $(\boldsymbol{x}, \log(\boldsymbol{y}b))$. Sauvegarder ce programme sous `VI1.m` (*note VI sont vos initiales*). Test $\alpha = 2$, $\lambda = -1$ sur l'intervalle $[0, 3]$ avec un pas de 0.01.



3. On veut approcher les données $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} = \log(\boldsymbol{y}b))$ par une droite $z = ax + b$ en utilisant la méthode des moindres carrées. Compléter le programme précédent en construisant la matrice $\boldsymbol{A}$ et le second membre $\boldsymbol{z}$ associés au problème moindres carrées : minimiser $\sum_{i=1}^{m}(\log(yb)_i - (ax_i + b))^2$. Sauvegarder sous `VI2.m`. Mêmes données.

4. Compléter le programme précédent en résolvant le problème $\min \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} - \boldsymbol{z}\|$ au sens des moindres carrées où $\boldsymbol{u} = [a, b]^T$. On affichera la matrice $\boldsymbol{A}^T \times \boldsymbol{A}$, le vecteur $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{z}$ et la solution $\boldsymbol{u}$. Sauvergarder ce programme sous `VI3.m` . Mêmes données.

5. Comparer les valeurs a et b trouvées au valeurs initiales λ et α. Remarques en commentaire sur votre programme.

6. En déduire une courbe approchant les donnes $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}b)$. Compléter le programme précédent en traçant les graphes de $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\ell)$ où $\boldsymbol{y}\ell$ est le signal lissé, $y\ell = e^{ax+b} = e^b \times e^{ax}$. Sauvegarde sous `VI4.m`.

Exercice 2 : On cherche maintenant à déterminer si un tableau de données $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ suit une loi de Poisson $y = \alpha e^{-\alpha x}$.

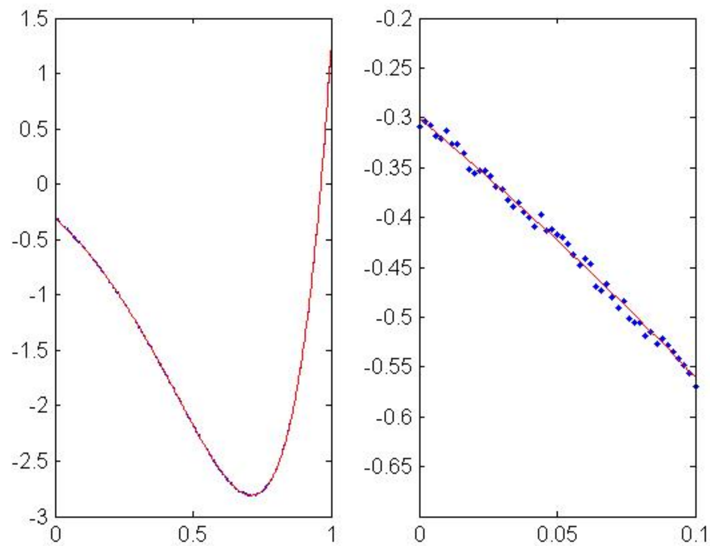
1. A l'aide de l'exercice 1, construire un programme testant si le fichier 'donnees1' peut être approché par une loi de Poisson donc avec les notations de l'exercice précédent, $|\alpha - \lambda| \leq$ *precis*. On affichera la matrice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}$. Sauvegarder votre travail sous le fichier `VI5.m`. Données dans le fichier et *precis* $= 0.02$. La lecture des données se fait par la commande : `T=csvread('donnees1')`

2. Testez maintenant le fichier 'donnees2' et $precis = 0.02$. Sauvegarder votre travail sous le fichier `VI6.m`.

Exercice 3 :

On cherche à déterminer les coefficients α_i de la loi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{(i-1)x}$ approchant au sens des moindres carrées les données $\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ du fichier 'donnees3'.

1. On choisit $n = 5$. Construire la matrice $\boldsymbol{A}$ et le vecteur $\boldsymbol{b}$ associée au problème moindres carrées $\min \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{b}\|$.
2. En déduire la matrice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$, le vecteur $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$ puis la solution $\boldsymbol{\alpha}$ qu'on affichera. Sauvegarde dans `VI7.m`.
3. Dessiner les données $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ et la loi $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{(i-1)x}$ pour $x \in [0, 1]$, puis sur un second graphe en traçant uniquement la partie pour $x \in [0, 0.1]$. Sauvegarde dans `VI8.m`.



4. On reprend avec $n = 8$. Sauvegarde dans `VI9.m`. Que constate-t-on ? Réponse en fin de programme en commentaire.