INSA Institut National des Sciences Appliquées Rennes

4 ième année EII

Année universitaire 2017-2018
Examen ANALYSE NUMÉRIQUE
Mardi 9 janvier 2018 — durée : 3h

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 : Considérons la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 30 \\ 3 & 30 & 109 \end{bmatrix}$. Déterminer la matrice $\boldsymbol{C}$ de la factorisation de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^T \times \boldsymbol{C}$ avec $\boldsymbol{C}$ triangulaire supérieure.

Exercice 2 :

1. En utilisant une méthode de moindres carrés, on souhaite approcher un nuage de m points du plan, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$ par une cubique d'équation $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Décrire la méthode, la(les) matrice(s) et l'(les) équation(s) possibles pour résoudre ce problème. Préciser la valeur minimum de m.

2. On se place dans l'espace $E = C^0([0,1])$ muni du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_0^1 t f(t) g(t)\, dt$.

   Etant donné une fonction $f \in E$, on cherche un plolynôme p de degré inférieur ou égal à n qui minimise $\displaystyle\int_0^1 t(f(t) - p(t))^2\, dt$. Décrire la méthode, la(les) matrice(s) et l'(les) équation(s) possibles pour résoudre ce problème.

Exercice 3 : Si $\boldsymbol{y} = \| : y_0, y_1, \dots, y_{n-1} : \|$ est une suite périodique de période n, on rappelle que la transformée de Fourier discrète est définie par $\boldsymbol{z} = TFD(\boldsymbol{y})$ avec $z_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} y_\ell \omega^{k\ell}$ où $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Montrer que si $n = 2m$ alors pour $k = 0, \dots, m-1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z_k & = & P_k + \omega^k Q_k, \\ z_{k+m} & = & P_k - \omega^k Q_k \end{array} \right.$$

   en précisant P_k et Q_k.

2. Ecrire alors l'algorithme récursif $\boldsymbol{z} = FFT(\boldsymbol{y})$ de la transformée de Fourier rapide si $n = 2^p$.

Exercice 4 : Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Déterminer les valeurs singulières de $\boldsymbol{A}$.

Exercice 5 : On considère le problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(t) &= \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t)), \forall t \in I := [t_1, t_1 + T], && (1) \\ \boldsymbol{y}(t_1) &= \boldsymbol{\eta}. && (2) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^p$ et $f \in C(I \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ est continue et Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable. Ainsi le problème diffŕentiel admet une solution unique.

Pour l'approximation numérique, on construit la subdivision uniforme $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1} = t_1 + T$, set $h := T/n = t_{i+1} - t_i$

Le schéma numérique est celui de Heun défini par $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{\eta}$ et

$$\boldsymbol{u}_{i+1} = \boldsymbol{u}_i + h\phi(t_i, \boldsymbol{u}_i, h), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

où $\phi(t, \boldsymbol{u}, h) = \dfrac{1}{2}\big(f(t, \boldsymbol{u}) + f(t + h, \boldsymbol{u} + hf(t, \boldsymbol{u}))\big)$.

Pour les 3 questions suivantes $p = 1$.

1. Montrer que le schéma est stable. *Utiliser la condition de Lipschitz.*

2. Nous définissons $\delta(h) = \big|y(t + h) - y(t) - h\phi(t, y(t), h)\big|$, où $y(t) \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est une solution de (1). Montrer que $\delta(h) \leq ch^3$. *Utiliser $f(t, y(t)) = y'(t)$ et introduire $\frac{1}{2}y'(t + h) - \frac{1}{2}f\big(t + h, y(t + h)\big)$ dans $\phi(t, y(t), h)$*

3. En déduire la convergence et l'ordre du schéma.

Un corps B de masse m repose sur un plan horizontal sans friction et est attaché à à un ressort lui même fixé à un mur (Figure 1). On suppose que tous les mouvements de B ont lieu le long d'un axe x orthogonal au mur. Le ressort exerce une force sur B s'il est tiré ($x > 0$) ou comprimé ($x < 0$), force qui tend à ramener B à l'équilibre $x = 0$. On suppose que la force est de la forme $kx + x^3$, avec $k > 0$, constant. Si $x(t)$ est la position de B au temps t, on obtient alors $mx''(t) = -kx(t) + x^3(t)$. On suppose que $m = 1$, et on pose $z(t) = x'(t)$ pour la vitesse.

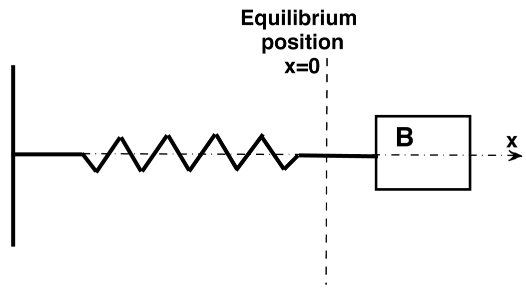

Figure 1: Wall-Spring-Body.

1. Ecrire les équations sous la forme d'un système
$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}\left(t, \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}\right) \tag{4}$$
avec conditions initiales $x(0) = \alpha$ et $z(0) = \beta$ en précisnt $\boldsymbol{f}$ sous la forme $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}\left(t, \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)$

2. On définit l'énergie cinétique $T(t) := \frac{1}{2}z(t)^2$ et l'énergie potentielle $V(t) := \frac{1}{2}kx(t)^2 - \frac{1}{4}x(t)^4$. Montrer que $E(t) := T(t) + V(t) = E$ où E est une constante. *On peut dériver $E(t)$.*

3. Ecrire le schéma numérique de Heun correspondant, sous la forme $\begin{bmatrix} u_{i+1,1} \\ u_{i+1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(u_{i,1}, u_{i,2}) \\ \varphi_2(u_{i,1}, u_{i,2}) \end{bmatrix}$ en explicitant φ_1) et φ_2. En particulier, avec $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k = 1$, $h = 0.1$, calculer $\boldsymbol{u}_2$. En déduire les valeurs approchées de $E(t_i)$, $i = 1, 2$ correspondantes : E_1, E_2