INSA de Rennes
3 GM

Année universitaire 2017-2018
TP-Examen Méth. Num. Non Lin.
Mercredi 25 avril 2018 — durée : 2h

1 Intégration numérique

Soit $\phi \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. Dans cette partie, on approche l'intégrale $I = \int_x^{x+h} \phi(t)\, dt$ par $Iapp = \int_x^{x+h} p(t)\, dt$ où $p \in \mathbb{P}_2$ est le polynôme interpolant ϕ aux points $x-2h, x-h, x$. Après calculs, on obtient

$$Iapp = \frac{5}{12} h\phi(x-2h) - \frac{4}{3} h\phi(x-h) + \frac{23}{12} h\phi(x). \quad (1)$$

1. Construire une fonction `phi.m` calculant $\phi(x)$. Test avec $\phi(x) = \exp(x)$.

```
>> phi([0,1])
ans =
    1.0000    2.7183
```

2. Écrire une fonction `integnum.m` qui prend la fonction à intégrer sous forme de fichier, x et h en paramètres d'entrée et calcul $Iapp$. Test :

```
>> integnum('phi',1,0.5)
ans =
    1.7142
```

3. En faisant varier h, étudier l'erreur $err = |I - Iapp|$ en fonction de h. Vous partirez d'un tableau $arrh = [1/2^i]_{i=4,\dots,10}$ et vous construirez le tableau $arrerr$ correspondant, puis vous tracerez $\log(err)$ en fonction de $\log(h)$ pour ces valeurs. On prend $x = 0$, $\phi(t) = e^t$. Noter que $I = exp(h) - 1$. Programme sauvegardé sous `VI1.m` où VI sont vos initiales. Afficher $arrerr$. Indiquerez en commentaire l'ordre de la méthode.

```
arrerr =
   1.0e-05 *
    0.5524    0.0351    0.0022    0.0001    0.0000    0.0000    0.0000
```

2 Équation différentielle

Étant donnés $\eta \in \mathbb{R}^p$ et une fonction $f \in C^2([t_1, t_1+T] \times \mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p))$, on considère le problème différentiel

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [t_1, t_1 + T], \\ y(t_1) = \eta \end{cases} \quad (2)$$

pour lequel on va calculer une solution approchée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $h = T/n$ et la subdivision $t_i = t_1+(i-1)h$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Le schéma numérique est alors

Initialisation

$$u_1 = \eta,\ v = u_1 + hf(t_1, u_1),\ u_3 = u_1 + 2hf(t_2, v),\ u_2 = u_1/4 + v/2 + u_3/4.$$

Pour $i = 3, \ldots, n$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{5}{12}hf(t_{i-2}, u_{i-2}) - \frac{4}{3}hf(t_{i-1}, u_{i-1}) + \frac{23}{12}hf(t_i, u_i).$$

Dans la suite, on s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{-y(t) + \cos(t)}{t+1},\ t \in [0, 2], \\ y(0) = \eta = -1/4. \end{cases} \tag{3}$$

1. Écrire une fonction `f1.m` (syntaxe `v=f1(t,u)`) où f est la fonction correspondant à l'equation différentielle dans (3).

```
>> f1(1,1)
ans =
    -0.2298
```

2. Écrire une fonction `adams.m`, `[t,u]=adams(fichierf,I,eta,n)` où "fichierf" est le fichier calculant la fonction f, ici `f1.m`, "I" est l'intervalle d'intégration, "eta" la condition initiale et "n" le nombre d'intervalles de subdivision). Test avec $n = 5$.

```
>> [t,u]=adams('f1',[0,2],-1/4,5)
t =
          0    0.4000    0.8000    1.2000    1.6000    2.0000
u =
    -0.2500    0.0959    0.1335    0.2673    0.2318    0.1840
```

3. La solution exacte de (3) est $y(t) = \dfrac{\sin(t) - 1/4}{t+1}$. Écrire une fonction `yex.m` calculant $y(t)$. Test

```
>> yex([0:0.5:2])
ans =
    -0.2500    0.1530    0.2957    0.2990    0.2198
```

4. Écrire un programme qui calcule et trace solution exacte et solution approchée sur un même graphique. Sachant que l'erreur est définie par $err = \max_{i=1,\ldots,n+1} |y(t_i) - u_i|$), afficher aussi l'erreur. Sauvegarde sous `VI2.m`. Test avec $n = 5$ et données précédentes.

5. Étudier l'erreur en fonction de n en partant d'un tableau $arrn = [50 : 10 : 200]$), en construisant le tableau $arrerr$ correspondant. Indiquer l'ordre de la méthode. Sauvegarde sous `VI3.m`.

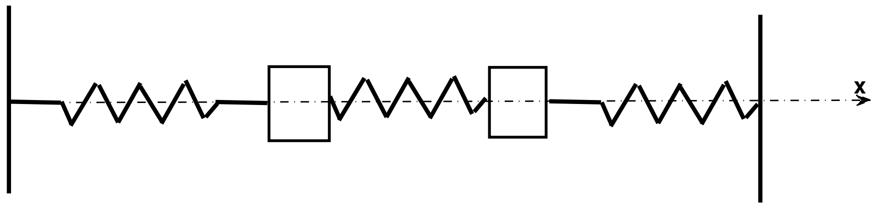

Figure 1: Mur-Ressort-Corps-Ressort-Corps-Ressort-Mur.

3 Multi ressorts

Maintenant, on étudie un système mécanique composé de deux corps de masse $m_1 = 1$ et $m_2 = 1$, alignés et situés dans un plan. Leurs positions par rapport à l'equilibre sont notés $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et ils sont reliés à trois ressorts de raideur k_j, $j = 1, 2, 3$, le premier et le dernier étant attachés à deux murs opposés. (voir Figure 1).

Chaque corps est de plus soumis à une force extérieure $g_i(t)$ et à une force de frottement $-c_i x_i'(t) - d_i {x_i'}^3(t)$ avec $c_i, d_i > 0$. Le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1''(t) & = & -(k_1+k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t) - c_1 x_1'(t) - d_1 {x_1'}^3(t) + g_1(t) \\ x_2''(t) & = & -(k_2+k_3)x_2(t) + k_2 x_1(t) - c_2 x_2'(t) - d_2 {x_2'}^3(t) + g_2(t) \end{array}\right. \quad t \in [0, b] \tag{4}$$

avec des conditions initiales $x_i(0) = \alpha_i$, $x_i'(0) = \beta_i$ pour $i = 1, 2$.

Dans la suite, on suppose que $k_1 = k_2 = k_3 = 1/2$, $c_1 = -c_2 = 1/2$, $d_1 = 2 = -d_2$, $g_1(t) = 2\cos^3(t)$, $g_2(t) = 2\sin^3(t)$.

Après avoir écrit les équations sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{X}'(t) & = & f2(t, \boldsymbol{X}(t)), \quad t \in [0, b] \\ \boldsymbol{X}(0) & = & \boldsymbol{\eta} \end{array}\right. \tag{5}$$

où $\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ x_2(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}$, calculer une approximation $\boldsymbol{u}_i$ de $\boldsymbol{X}(t_i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ sur une subdivision uniforme de $[0, b]$, tracer solutions exactes, $x_1(t)$, $x_2(t)$ et solutions approchées (`VI4.m`) puis étudier l'erreur (`VI5.m`) quand n varie,. Test $b = 2$, conditions initiales : $x_1(0) = 0$, $x_1'(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_2'(0) = 0$. La solution exacte est donnée par $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$ et $err = max_i(|x_1(t_i) - u(1, i)|) + max_i(|x_2(t_i) - u(3, i)|)$.

suggestion $n = 5$ pour `VI4.m` puis $arrn = 100 : 10 : 200$ pour `VI5.m`.

4 Application à la trajectoire de trois chats

Trois chats sont positionnés aux trois sommets d'un triangle ABC du plan à l'instant 0. A chaque instant, ils se poursuivent avec une vitesse constante et égale à 1 en module. À l'instant t, pour $k = 1, 2, 3$, le chat k à la position $C_k(t) = (x_k(t), y_k(t))$ court vers le chat $k+1$ à la vitesse constante en module $\frac{d\,\overrightarrow{OC_k}}{dt}(t) = \frac{\overrightarrow{OC_{k+1}}(t) - \overrightarrow{OC_k}(t)}{\|\overrightarrow{OC_{k+1}}(t) - \overrightarrow{OC_k}(t)\|_2}$ où $C_4 = C_1$. Attention, la vitesse devient nulle si le chat k a rejoint le chat $k+1$, c'est à dire $|C_{k+1} - C_k\|_2 \leq 10^{-2}$, par exemple.

Déterminer et tracer les trajectoires (approchées) sur l'intervalle de temps $[0, 9]$. Sauvegarde sous `VI6.m` et fonctions annexes. Test $A(0, 0)$, $B(0, 10)$, $C(9, 10)$, $n = 30$.