NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2018-2019
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mercredi 8 novembre 2017 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement !

Exercice 1. Nature des intégrales et séries ci-dessous. "CV" : converge, "DV" : diverge.
Cocher une case à tort sera pénalisé.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n^3-3}$ ☐ CV ☐ DV
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-1/n}$ ☐ CV ☐ DV
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\, dx$ ☐ CV ☐ DV
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^{1/2}}{\ln n}$ ☐ CV ☐ DV
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(\cos(1/n)-1)^2$ ☐ CV ☐ DV
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}dx$ ☐ CV ☐ DV

Exercice 2. Que peut-on dire (égalité, majoration, minoration) des rayons de convergence R_i des séries entières $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dans les cas suivants ?

1. Si $a_n \geq \dfrac{1}{n}$ alors R_1
2. Si $a_n = n^2 2^{-n}$ alors R_2
3. Si $a_n = (-1)^n n^{-2}(1+3^n)$ alors R_3
4. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-4)^n$ converge alors R_4
5. Si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(-4)^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n 4^n$ diverge alors R_5

Exercice 3. On considère les trois intégrales suivantes

$$I := \int_0^{\pi/2} \ln t \, dt, \; J := \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \, dt, \; K := \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) \, dt.$$

1. Montrer la convergence et calculer I.

2. En déduire la convergence de J.

3. Montrer que $K = J$,

4. puis que $J + K = J - (\pi/2) \ln 2$.

5. En déduire J et K.

.

Exercice 4. On cherche une solution développable en série entière, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, du problème $(P) :\ y''(x) - 2xy'(x) - 4y(x) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Établir une relation de récurrence sur les a_n puis en déduire a_n en fonction de n.

.

Réciproquement, préciser le rayon de convergence de la série obtenue, puis simplifier son expression.

.

Exercice 5. Si q est un entier strictement positif, on définit $u_k := \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+q)}$ pour $k \geq 1$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Montrer (par récurrence) que $S_n := \dfrac{1}{q}\left(\dfrac{1}{q!} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+q)}\right)$.

En déduire $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

****** FIN *******