4 ième année EII

Année universitaire 2018-2019
Examen ANALYSE NUMÉRIQUE
Vendredi 11 janvier 2019 — durée : 3h

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 : Considérons la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 13 & -12 & 11 \\ 3 & -12 & 14 & -16 \\ -4 & 11 & -16 & 22 \end{bmatrix}$. Déterminer la matrice $\boldsymbol{C}$ de la factorisation de Cholesky $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^T \times \boldsymbol{C}$, avec $\boldsymbol{C}$ triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

Exercice 2 :

1. En utilisant une méthode de moindres carrés, on souhaite approcher un nuage de m points du plan, $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,m}$ par une quadrique d'équation $y = ax^2 + bx + c$. Décrire la méthode, la(les) matrice(s) et l'(les) équation(s) possible(s) pour résoudre ce problème.
2. On se place dans l'espace $E = C^0([-\pi, \pi])$ muni du produit scalaire $< f, g >= \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$.
   Etant donné une fonction $u \in E$, on cherche une fonction trigonométrique $p(t) = a + b\sin(t) + c\cos(t)$ qui minimise $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (u(t) - p(t))^2\,dt$. Décrire la méthode, la(les) matrice(s) et l'(les) équation(s) possible(s) pour résoudre ce problème.
3. Donner la solution du problème si $u(t) = t$.

Exercice 3 :
On considère le signal discret sur la subdivision uniforme de $[0, 1]$:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_i	-16	-12	16	8	4	0	-1	1	-16	8	10	6	10	8	10	12

1. Tracer le graphe sur la feuille jointe.
2. Calculer sa décomposition en ondelettes de Haar.
3. Filtrer en éliminant les coefficients dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 2 et reconstruire le signal filtré. Graphe sur la feuille jointe.

Ne pas oublier de mettre la feuille des graphes dans votre copie

Exercice 4 :
Soit φ et $\psi \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Si $p \in \mathbb{P}_2$ est le polynôme interpolant φ aux points $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, déterminer $p(x)$ dans la base de Newton en fonction des valeurs de φ aux points $-2, -1, 0$.

   On rappelle que
$$\varphi(x) - p(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{3!}\varphi^{(3)}(\xi), \text{ où } \xi \text{ est entre } -2, 0 \text{ et } x.$$

2. On approche l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ par la quadrature $J_1 = \displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$. Montrer que $J_1 = \dfrac{1}{12}\big[5\varphi(-2) - 16\varphi(-1) + 23\varphi(0)\big]$.

3. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que $I = \displaystyle\int_t^{t+h} \psi(u)\,du = h\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ où $\varphi(x) = \psi(hx+t)$.

4. Déduire des questions précédentes une quadrature J pour approcher I en fonction des valeurs de ψ aux points $t-2h, t-h, t$.

5. Montrer que $|I - J| \leq c_1 h^4 M_3$ où $M_3 = \max|\psi^{(3)}(u)|$ en précisant c_1.

6. On considére le problème de Cauchy
$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t, y(t)),\ t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) & = & \eta \end{array}\right. \tag{1}$$

   On admet qu'il possède une solution unique notée $y(t)$.

   Pour approcher (1), le schéma numérique est initialisé sur une subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = T/n$ et $t_i = t_0 + ih$ par
$$u_0 = \eta,\ v = u_0 + hf(t_0, u_0),\ u_2 = u_0 + 2hf(t_1, v),\ u_1 = u_0/4 + v/2 + u_2/4,$$

   Sachant que $y(t_{i+1}) - y(t_i) = \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(u)\,du$, où $\psi(u) = f(u, y(u))$, à l'aide de la quadrature précédente, proposer une méthode multipas.
$$u_{i+1} = u_i + \ldots,\ \text{pour } i = 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Exercice 5 : Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $\boldsymbol{A}$ et une matice $\boldsymbol{P}$ telle que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ où $\boldsymbol{D}$ est la matrice diagonale des valeurs propres.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{I}$ la matrice identité, calculer $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{I} + x\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}$.

Exercice 6 : On considére le problème de Cauchy

$$(P)\left\{\begin{array}{l} y''(t) = -2y(t) - 3y'(t),\ t \in [0,10], \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{array}\right.$$

1. Déterminer la solution unique de (P). *Il peut être utile de chercher* 2 *solutions de* $y'' = -2y - 3y'$ *du type* $y(t) = e^{rt}$.

2. En posant $\boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} : [0,10] \to \mathbb{R}^2$, montrer que (P) peut s'écrire

$$(\Pi)\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{Y}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t) \text{ pour },\ t \in [0,10], \\ \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{\eta} \end{array}\right.$$

   où $\boldsymbol{A}$ est une matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ à préciser.

   On admet que la matrice $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable donc qu'il existe $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ telle que $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PD}$.

   On considère la subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = 10/n$ et $t_i = t_1 + (i-1)h$ pour $i = 1, \ldots, n+1$

3. **Méthode d'Euler explicite:**

   (a) Déterminer la suite $\boldsymbol{U}_i \in \mathbb{R}^2$ d'approximations de $\boldsymbol{Y}(t_i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ en précisant $\boldsymbol{U}_1$ puis $\boldsymbol{U}_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{U}_i$.

   (b) On pose $\boldsymbol{PX}_i = \boldsymbol{U}_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Déterminer $\boldsymbol{X}_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{X}_i$, puis $\boldsymbol{X}_i$ en fonction de $\boldsymbol{D}$, h, i et $\boldsymbol{X}_1$.

   (c) Après avoir déterminé $\boldsymbol{D}$, donner une éventuelle condition sur n pour que $\|\boldsymbol{X}_i\| \leq \|\boldsymbol{X}_1\|$ pour $i = 1, \ldots, n$.

4. **Méthode implicite des trapèzes:** Pour un système d'équation $\boldsymbol{Y}'(t) = F(t, \boldsymbol{Y}(t))$, la méthode numérique commençant à $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{\eta}$ est ensuite définie implicitement par

$$\boldsymbol{V}_{i+1} = \boldsymbol{V}_i + \frac{h}{2}\big(F(t_i, \boldsymbol{V}_i) + F(t_{i+1}, \boldsymbol{V}_{i+1})\big).$$

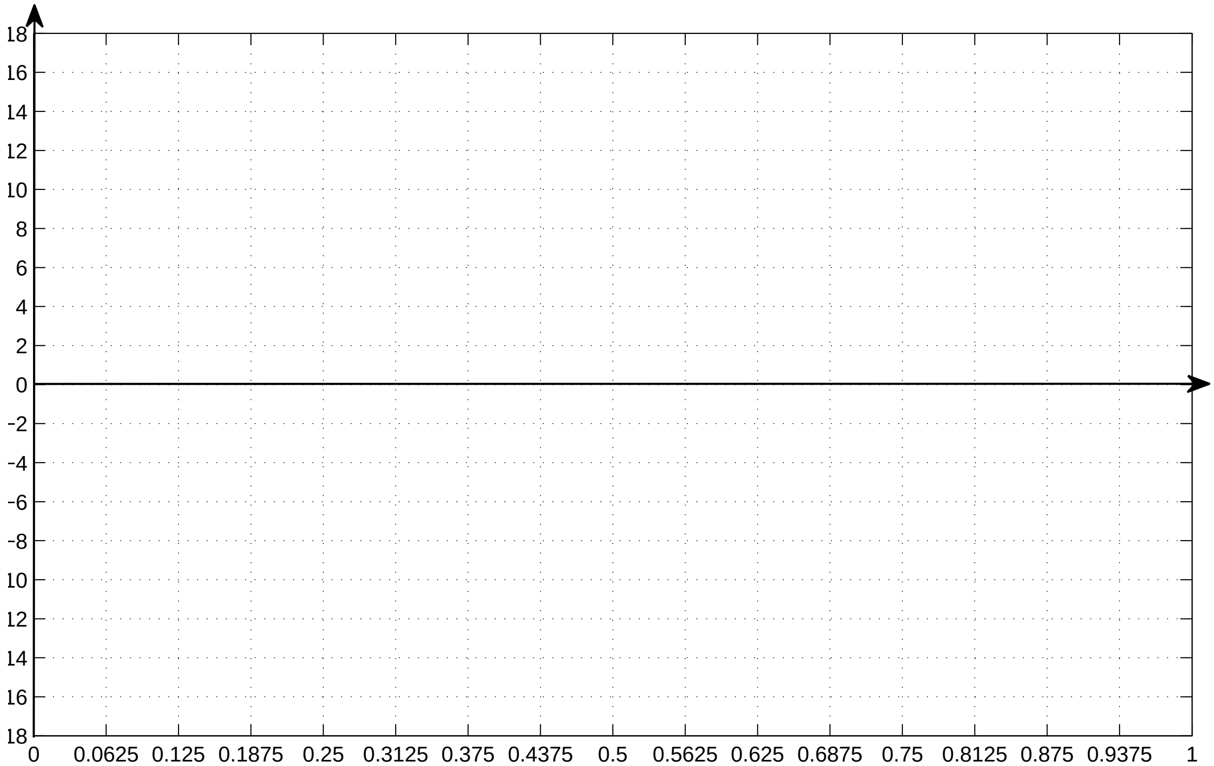
   (a) Déterminer la suite $\boldsymbol{V}_i \in \mathbb{R}^2$ d'approximations de $\boldsymbol{Y}(t_i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ en calculant $\left(\boldsymbol{I} - \dfrac{h}{2}\boldsymbol{A}\right) V_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{V}_i$.

   (b) On pose $\boldsymbol{PZ}_i = \boldsymbol{V}_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Déterminer $\left(\boldsymbol{I} - \dfrac{h}{2}\boldsymbol{D}\right) \boldsymbol{Z}_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{Z}_i$, puis $\boldsymbol{Z}_i$ en fonction de $\boldsymbol{D}$, h, i et $\boldsymbol{Z}_1$.

   (c) Connaissant $\boldsymbol{D}$, donner une éventuelle condition sur n pour que $\|\boldsymbol{Z}_i\| \leq \|\boldsymbol{Z}_1\|$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Nom et prénom :

Signal initial



Signal filtré