INSA de Rennes
3 GM

Année universitaire 2018-2019
DS-Examen Méth. Num. Non Lin.
Mercredi 3 avril 2019 — durée : 2h

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 : Soit $f \in C^4([-1,1],\mathbb{R})$. On approche $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ par la quadrature $J(f) = \alpha f(-1) + \beta f(0) + \gamma f(1)$.

1. Déterminer α, β, γ pour maximiser l'ordre de la quadrature. Préciser cet ordre. Dans la suite on prend ces valeurs pour α, β, γ.
2. Soit $p \in \mathbb{P}_3$ tel que $p(k) = f(k)$ pour $k \in \{-1, 0, 1\}$ et $p'(0) = f'(0)$. Montrer que $I(p) = J(p) = J(f)$. On ne demande pas de calculer p.
3. On admet que si $x \in [-1,1]$ alors $f(x) - p(x) = \dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)x^2(x+1)$, où $\xi \in]-1,1[$. Majorer $|I(f) - J(f)|$ en fonction de $M_4 = \max_{t\in[-1,1]} |f^{(4)}(t)|$.

Exercice 2 : Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'(x) > 0$. On suppose qu'il existe une racine (donc unique) $\bar{x}$ de $f(x) = 0$. L'approximation de la racine est faite par la méthode de Steffensen. On considère la suite $x_0 \in \mathbb{R}$ puis

$$x_{n+1} = x_n - q(x_n)f(x_n) \text{ où } q(x) = \frac{f(x)}{f\big(x + f(x)\big) - f(x)}.$$

Vous pouvez ne pas savoir faire une question mais utiliser le résultat pour passer à la suivante

1. Montrer que si $x \to \bar{x}$, alors $f(x) \to 0$ et $q(x) \sim \dfrac{1}{f'(x)}$.
2. À quelle méthode peut-on comparer celle-ci ?
3. Si $h \to 0$, pour $p \in \mathbb{N}$, on utilise une des deux notations $o(h^p) = h^p\varepsilon(h)$. On suppose toujours que $x \to \bar{x}$ et on pose $h = x - \bar{x}$.

   Montrer que $o(f(x)^p) = o(h^p)$ ou $f(x)^p\varepsilon_1(f(x)) = h^p\varepsilon_2(h)$.
4. Montrer que

$$\begin{aligned} f(x + f(x)) - f(x) &= f(x)f'(x) + 1/2 f(x)^2 f''(x) + o(f(x)^2) \\ &= f(x)(f'(\bar{x}) + hr(\bar{x}) + o(h)). \end{aligned}$$

   où $r(\bar{x})$ dépendant des valeurs $f'(\bar{x})$ et $f''(\bar{x})$ est à préciser.

   Ainsi $q(x) = \dfrac{1}{f'(\bar{x}) + hr(\bar{x}) + o(h)}$.

5. En utilisant un développement à l'ordre 2 de $f(x)$ en $\bar{x}$, montrer que

$$q(x)f(x) = h + s(\bar{x})h^2 + o(h^2)$$

où $s(\bar{x})$ dépend des valeurs $f'(\bar{x})$ et $f''(\bar{x})$. *On ne demande pas le calcul de* $s(\bar{x})$.

6. Si la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$ conclure sur l'ordre de la méthode.

Exercice 3 :

1. Pour $h > 0$ donné, déterminer les polynômes a et b de $\mathbb{P}_1$ tels que les polynômes p_0 et q_0 de $\mathbb{P}_3$ définis par

$$p_0(x) = (x-h)^2 a(x),\ q_0(x) = (x-h)^2 b(x)$$

vérifient

$$\begin{array}{llll} p_0(0) = 1 & p_0'(0) = 0 & p_0(h) = 0 & p_0'(h) = 0 \\ q_0(0) = 0 & q_0'(0) = 1 & q_0(h) = 0 & q_0'(h) = 0 \end{array}$$

On définit alors $p_1(x) = p_0(h-x)$ et $q_1(x) = -q_0(h-x)$.

2. **Interpolation d'Hermite**

(a) Montrer que $\{p_0, q_0, p_1, q_1\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$.

(b) Si $g \in C^4(\mathbb{R})$, déterminer $P \in \mathbb{P}_3$ tel que

$$P(0) = g(0),\ P'(0) = g'(0),\ P(h) = g(h),\ P'(h) = g'(h).$$

(c) Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que

$$P(2h) = \alpha g(0) + h\beta g'(0) + \gamma g(h) + h\delta g'(h). \tag{1}$$

3. **Évaluation de l'erreur**

Soit $\omega(x) = x^2(x-h)^2$ et $c \in \mathbb{R}$. La fonction φ_c est définie par

$$\varphi_c(x) = g(x) - p(x) - c\omega(x).$$

Ainsi $\varphi_c(0) = \varphi_c(h) = 0$.

(a) Montrer que pour $\bar{x} \notin \{0, h\}$, on peut choisir c tel que $\varphi_c(\bar{x}) = 0$.

(b) Pour cette valeur de c, montrer que φ_c' s'annule en 2 points distincts et différents de $0, h, \bar{x}$. Vérifier que φ_c' s'annule aussi en 0 et h.

(c) En déduire qu'il existe $\bar{\xi} \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi_c^{(4)}(\bar{\xi}) = 0$ et donc

$$g(\bar{x}) - P(\bar{x}) = \frac{g^{(4)}(\bar{\xi})}{4!}\omega(\bar{x}).$$

(d) Montrer alors $|g(2h) - P(2h)| \leq Kh^4$ en précisant la constante K en fonction de g.

4. **Approximation des solutions d'un système différentiel**

Pour $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathbb{R}$, on considère le problme

$$y'(t) = f(t, y(t), t \in [0,T] \text{ et } y(0) = \eta$$

On suppose qu'il admet une solution $y \in C^4([0,T], \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, on définit $h = T/n$ et $t_i = ih$ pour $i = 0, \ldots, n$. Le but est de proposer une approximation u_i de $y(t_i)$. On prend $u_0 = \eta$ et u_1 est calculé à partir de u_0 par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 (ou 4). Si $i \geq 1$, pour déterminer u_{i+1}, on construit le polynôme $P_i \in \mathbb{P}_3$ tel que

$$P_i(t_{i-1}) = u_{i-1},\ P_i'(t_{i-1}) = f(t_{i-1}, u_{i-1}),\ P_i(t_i) = u_i,\ P_i'(t_i) = f(t_i, u_i) \qquad (2)$$

et on définit $u_{i+1} := P_i(t_{i+1}) = P_i(t_i + h)$.

(a) En utilisant (1), donner sans calcul l'expression de u_{i+1} en fonction de $t_{i-1}, t_i, u_{i-1}, u_i$.

(b) On peut aussi construire un polynôme $\hat{P}_i$ en remplaçant u_k par $y(t_k)$ pour $k = i-1, i$ dans (2). L'erreur de consistance est $\epsilon(t_i, h) = \left| \dfrac{y(t_{i+1}) - \hat{P}(t_{i+1})}{h} \right|$. Donner une majoration de cette erreur et en déduire l'ordre du schéma.

NB : A priori, ce schéma n'est pas stable et n'a donc qu'un intérêt théorique...