3 GM

Année universitaire 2016-2017
Examen Méthodes Numérique
Mercredi 24 mai 2017 — durée : 2h

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 :

Pour n entier non nul, soit $x_i = i - 1$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. On considére le polynôme de Lagrange p_n qui vérifie $p_n(x_i) = x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $p_n(x_{n+1}) = n + 1$.

1. Déterminer p_4, en utilisant par exemple la base de Newton.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \to & y_1 & & & & & & & & \\
 & & & \searrow & & & & & & & \\
 & & & & [x_1,x_2] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 & \to & y_2 & & & & [x_1,x_2,x_3] & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
 & & & & [x_2,x_3] & & & & [x_1,x_2,x_3,x_4] & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
x_3 & \to & y_3 & & & & [x_2,x_3,x_4] & & & & [x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & [x_3,x_4] & & & & [x_2,x_3,x_4,x_5] & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & \\
x_4 & \to & y_4 & & & & [x_3,x_4,x_5] & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & & [x_4,x_5] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
x_5 & \to & y_5 & & & & & & & &
\end{array}
$$

2. Généralisation $p_n =$.

Exercice 2 :

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ vérifiant une condition de Lipschitz :

$$\exists L > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \tag{1}$$

1. Pour $h > 0$ donné, on définit alors la fonction g_h par $g_h(x) = x - \dfrac{h}{2} f(x)$. Pour tout $w \in \mathbb{R}$, on veut montrer que pour h assez petit, l'équation

   $$g_h(x) = w \tag{2}$$

   admet une solution unique.

   Soit la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = w + \dfrac{h}{2} f(x_n)$ pour $n = 0, 1, \ldots$.

   En écrivant $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, montrer que pour $h < \dfrac{2}{L}$, la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$, puis que $\bar{x}$ est la solution unique de (2).

2. En construisant une subdivision uniforme sur $[0,T]$: $h = T/n$, $t_k = h(k-1)$ pour $k = 1,\dots,n+1$, on veut approcher la solution de l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(y(t)),\, t \in [0,T], \\ y(0) = \eta \end{array} \right. \tag{3}$$

par le schéma (implicite) de Cranck-Nicolson

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \eta \\ z_{k+1} = z_k + \dfrac{h}{2}(f(z_k) + f(z_{k+1})),\, k = 1\dots,n \end{array} \right. \tag{4}$$

En utilisant la question précédente, montrer que, pour h assez petit, z_k étant connu, z_{k+1} est parfaitement défini.

3. Sachant que dans la méthode des trapèzes,

$$\left| \int_0^h \phi(t)\,dt - \frac{h}{2}(\phi(0) + \phi(h)) \right| \leq ch^\alpha \tag{5}$$

où la valeur de α est à rappeler, déterminer l'erreur de consistance de la méthode puis l'ordre de la méthode.

Exercice 3 :

Soit Π l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodiques de période 1 i.e. $f(x+1) = f(x)$ et Π_n l'ensemble des suites de $\mathbb{C}$ de période n i.e. $z_{k+n} = z_k$.

Pour $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \Pi$, on veut approcher numériquement les solutions $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \Pi$ du problème suivant

$$-u''(t) = f(t) \tag{6}$$

1. (a) Montrer que si u est solution de (6) alors $u + c$ est aussi solution où $c \in \mathbb{C}$ est une constante.

   (b) Montrer que si de plus $u(0) = 0$ alors (6) admet une solution unique.

2. En construisant une subdivision uniforme, $h = 1/n$, $t_k = hk$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on désigne par $(z_k) \in \Pi_n$ la suite des approximations des valeurs $(u(t_k))$ obtenues en remplaçant $h^2u''(t_k)$ par $z_{k-1} - 2z_k + z_{k+1}$ dans (6).

(a) Montrer que le problème approché peut s'écrire $\boldsymbol{AZ} = \boldsymbol{b}$ où $\boldsymbol{Z} = [z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}]^T$, $\boldsymbol{b} = h^2[f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_{n-1})]^T$ et $\boldsymbol{A}$ à préciser [1].

(b) $\boldsymbol{A}$ est-elle inversible ?

Exercice 4 : On considére le problème de Cauchy

$$(P) \begin{cases} y''(t) = -2y(t) - 3y'(t),\ t \in [0, 10], \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

1. Déterminer la solution unique de (P). [2]

2. En posant $\boldsymbol{Y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} : [0, 10] \to \mathbb{R}^2$, montrer que (P) peut s'écrire

$$(\Pi) \begin{cases} \boldsymbol{Y}'(t) = \boldsymbol{AY}(t) \text{ pour }, t \in [0, 10], \\ \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{\eta} \end{cases}$$

   où $\boldsymbol{A}$ est une matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ à préciser.

3. Montrer que la matrice $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable donc qu'il existe $\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ telle que $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{PD}$. *On ne demande pas de préciser* $\boldsymbol{P}$

   On considère la subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = 10/n$ et $t_i = (i-1)h$ pour $i = 1, \ldots, n+1$

4. **Méthode d'Euler explicite:**

   (a) Déterminer la suite $\boldsymbol{U}_i \in \mathbb{R}^2$ d'approximations de $\boldsymbol{Y}(t_i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ en précisant $\boldsymbol{U}_1$ puis $\boldsymbol{U}_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{U}_i$.

   (b) On pose $\boldsymbol{PX}_i = \boldsymbol{U}_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Déterminer $\boldsymbol{X}_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{X}_i$, puis $\boldsymbol{X}_i$ en fonction de $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{D}$, h et i.

   (c) Après avoir déterminé $\boldsymbol{D}$, donner une éventuelle condition sur n pour que $\|\boldsymbol{X}_i\| \leq \|\boldsymbol{X}_1\|$ pour $i = 1, \ldots, n$.

[1] rappel : $z_0 = z_n$ et $z_{-1} = z_{n-1}$

[2] Pour mémoire, il peut être utile de chercher 2 solutions de $y'' = -2y - 3y'$ du type $y(t) = e^{rt}$.

5. **Méthode implicite des trapèzes:**

$$\boldsymbol{V}_{i+1} = \boldsymbol{V}_i + h_i \frac{1}{2} \left(F(t_i, \boldsymbol{V}_i) + F(t_{i+1}, \boldsymbol{V}_{i+1}) \right)$$

(a) Déterminer la suite $\boldsymbol{V}_i \in \mathbb{R}^2$ d'approximations de $\boldsymbol{Y}(t_i)$ pour $i = 1, \ldots, n+1$ en calculant $\left(\boldsymbol{I} - \frac{h}{2} \boldsymbol{A} \right) V_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{V}_i$.

(b) On pose $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{V}_i$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Déterminer $\left(\boldsymbol{I} - \frac{h}{2} \boldsymbol{D} \right) \boldsymbol{Z}_{i+1}$ en fonction de $\boldsymbol{Z}_i$, puis $\boldsymbol{Z}_i$ en fonction de $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{D}$, h et i.

(c) Connaissant $\boldsymbol{D}$, donner une éventuelle condition sur n pour que $\|\boldsymbol{Z}_i\| \leq \|\boldsymbol{Z}_1\|$ pour $i = 1, \ldots, n$.