**4 ième année EII**

**Année universitaire 2017-2018**
**CONTRÔLE TP ANALYSE NUMÉRIQUE**
**Mercredi 10 janvier 2018 — durée : 2h**

---

**Exercice 1** *Approximation des dérivées :*

Soit $\phi$ une fonction dérivable sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, nulle en 0 et 1. On cherche des valeurs approchées de $\phi'(x)$ sur un échantillonnage. On peut montrer que $\dfrac{\phi(x+h)-\phi(x-h)}{2h}$ est une approximation pour $h>0$ assez petit.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On pose $h = \dfrac{1}{n}$, $x_k = kh,\ k = 1, \ldots, n-1$ (il s'agit des points à l'intérieur de l'intervalle) et $\boldsymbol{y} = [\phi(x_1), \ldots, \phi(x_{n-1})]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$. On notera $\boldsymbol{x} = [x_1, \ldots, x_{n-1}]^T$ Une approximation $\boldsymbol{d}$ du vecteur $[\phi'(x_1), \ldots, \phi'(x_{n-1})]^T$ est donnée par

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2h}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

où $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est définie par

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 0 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

1. Ecrire un fichier "function" `phi.m` qui calcule la fonction $\phi$. Exemple $\phi(x) = \sin(\pi x)$.

```
>> phi([0.5 0.7])
ans =
     1.0000    0.8090
```

2. Ecrire un fichier "script" `VI1.m` ("VI" sont vos initiales...), qui étant donné l'entier $n$, calcule $h$, construit $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{d}$ affiche la matrice $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{d}$. Tester avec $n = 5$. *On pourra utiliser les fonctions* `diag et ones`.

```
>> VI1
A =
     0     1     0     0
    -1     0     1     0
     0    -1     0     1
     0     0    -1     0
d =
     2.3776
     0.9082
    -0.9082
    -2.3776
```

3. Compléter le programme précédent en ajoutant le graphe de la dérivée approchée et de la dérivée exacte. Sauvegarde sous `VI2.m`. Mêmes éléments test. *Pour $\phi(x) = \sin(\pi x)$, on calculera la dérivée exacte et on peut crér une "function"* `dphi.m`...

4. Compléter le programme précédent en ajoutant l'erreur $err = \max_{k=1,\dots,n-1} |\phi'(x_k) - d_k|$. Sauvegarde sous `VI3.m`. Mêmes éléments test.

```
>> VI3
err =
     0.1640
```

5. Etudier l'erreur quand $n$ varie, en partant d'un tableau $tabn = [100 : 10 : 150]$. En particulier, déterminer numériquement l'ordre de la méthode. Sauvegarde sous `VI4.m`. Test avec la même fonction. On affichera le tableau d'erreur, le graphe de $\log(err)$ en fonction de $\log(n)$ et le calcul de la pente de la droite de régression. Indiquer l'ordre en commentaire.

**Exercice 2** *Accélération de la convergence :*

On se donne cette fois 2 valeurs $n$ et $\bar{n} = 2n$. On construit les approximations des dérivées correspondantes $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^{n-1}$ en $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_{n-1}]^T$ et $\bar{\boldsymbol{d}} \in \mathbb{R}^{2n-1}$ en $\bar{\boldsymbol{x}} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2n-1}]^T$. A noter que $\bar{x}_{2i} = x_i$ pour $i = 1$ à $n-1$. La nouvelle approximation $\boldsymbol{dd} \in \mathbb{R}^{n-1}$ des dérivées en $\boldsymbol{x}$ a pour coordonnées $dd(i) = (4\bar{d}(2i) - d(i))/3$ pour $i = 1$ à $n-1$.

1. Ecrire un fichier "script", qui étant donnés l'entier $n$, calcule $\boldsymbol{dd}$, trace les graphes de la nouvelle dérivée approchée et de la dérivée exacte et calcule l'erreur maximale. Sauvegarde sous `VI5.m`. Mêmes éléments test $n = 5$. Afficher $err$.

2. Etudier l'erreur quand $n$ varie, en partant d'un tableau $tabn = [100 : 10 : 150]$. En particulier, déterminer numériquement l'ordre de la méthode. Sauvegarde sous `VI6.m`. Test avec la même fonction.

**Exercice 3** *Équation différentielle linéaire :*

On cherche à approcher les fonctions $y$, nulle en 0 et 1 vérifiant $x^3 y(x) + y'(x) = f(x)$ sur $[0, 1]$. En reprenant les notations précédentes, on se ramène à résoudre $\left(\boldsymbol{B} + \frac{1}{2h}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}$ où $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est la matrice diagonale telle que $b_{ii} = x_i^3$, $\boldsymbol{f} = [f(x_1), \dots, f(x_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_{n-1}]^T$ est l'approximation de $[y(x_1), \dots, y(x_{n-1})]^T$.

1. Ecrire un fichier "function" `f.m` qui calcule la fonction $f$. Exemple $f(x) = x^3 \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)$.

```
>> f([0.5;0.7])
ans =
     0.1250
    -1.5691
```

2. Ecrire un programme, qui étant donnés l'entier $n$, calcule $\boldsymbol{u}$, trace la graphe le graphe de la solution approchée et de la solution exacte, $y(x) = \sin(\pi x)$, puis calcule l'erreur $err = \max_{k=1,\dots,n-1} |y(x_k) - u_k|$. Sauvegarde sous `VI7.m`. Test $n = 5$ , afficher $err$.

3. Étudier l'erreur et préciser l'ordre de la méthode à partir de $tabn = [100 : 10 : 150]$. Sauvegarde sous `VI8.m`.

**Exercice 4** *Équation différentielle non linéaire :*

On cherche à approcher les fonctions $y$, nulle en 0 et 1 vérifiant $-\sin(y(x))/5 + x^3 y(x) + y'(x) = f_1(x)$ sur $[0, 1]$. En reprenant les notations précédentes, on se ramène à résoudre $\left(\boldsymbol{B} + \frac{1}{2h}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} + \sin(\boldsymbol{u})/5$ où $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est la matrice diagonale telle que $b_{ii} = x_i^3$, $\boldsymbol{f} = [f_1(x_1), \dots, f_1(x_{n-1}]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_{n-1}]^T$ est l'approximation de $[y(x_1), \dots, y(x_{n-1})]^T$ et $\sin \boldsymbol{u} = [\sin u_1, \dots, \sin u_{n-1}]^T$.

Cette équation définit $\boldsymbol{u}$ implicitement et la solution est approchée par une méthode itérative $\boldsymbol{u}^1 = [1, 1, \ldots, 1]^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\boldsymbol{u}^{n+1}$ est solution de $\left(\boldsymbol{B} + \dfrac{1}{2h}\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{f} + \sin(\boldsymbol{u}^n)/5$. On admet que la méthode converge en $2n$ itérations vers $\boldsymbol{u}$ et on prendra $f_1(x) = x^3 \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) - \sin(\sin(\pi x))/5$. Ainsi la solution exacte est $y(x) = \sin(\pi x)$.

1. Ecrire un programme, qui étant donnés l'entier $n$, calcule $\boldsymbol{u}$, trace la graphe le graphe de la solution approchée et de la solution exacte, $y(x) = \sin(\pi x)$, puis calcule l'erreur $err = \max\limits_{k=1,\ldots,n-1} |y(x_k) - u_k|$. Sauvegarde sous `VI9.m`. Test $n = 5$ , afficher $err$.

2. Étudier l'erreur et préciser l'ordre de la méthode à partir de $tabn = [100 : 10 : 150]$. Sauvegarde sous `VI10.m`.