INSA de Rennes
3 GM

Année universitaire 2017-2018
DS-Examen Méth. Num. Non Lin.
Mercredi 25 avril 2018 — durée : 2h

Documents et appareils électroniques interdits

Exercice 1 :

Soit $\phi \in C([0,1],\mathbb{R})$. On approche l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \phi(t)\,dt$ par $Iapp = b_1\phi(0) + b_2\phi(c_2)$. Déterminer b_1, b_2 et c_2 pour obtenir un ordre maximum.

Exercice 2 :

On cherche une solution approchée du problème différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \quad t \in [0,1] \\ y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta \end{array}\right. \tag{1}$$

Pour n entier non nul, on construit une subdivision uniforme $t_i = ih$, $i = 0,\ldots,n$ où $h = 1/n$ et on cherche une approximation u_i de $y(t_i)$. Pour $i = 1,\ldots,n-1$, $y'(t_i)$ est approché par $\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ et $y''(t_i)$ est approché par $\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$.

1. Montrer que (1) est ainsi approché par

$$\left\{\begin{array}{l} u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1} = h^2 f_i, \quad i = 1,\ldots,n-1 \\ u_0 = \alpha, \quad u_n = \beta \end{array}\right. \tag{2}$$

   en précisant f_i.

2. On suppose que $f(t,u,v) = a(t)u + b(t)v + g(t)$ où $a, b, g \in C([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que (2) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $\boldsymbol{AU} = \boldsymbol{s}$ où $\boldsymbol{U} = [u_1,\ldots,u_{n-1}]^T$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{s}$ à préciser.

3. Si f est non linéaire, proposer une méthode pour déterminer $\boldsymbol{U} = [u_1,\ldots,u_{n-1}]^T$.

Exercice 3 :

Soit $g \in C^p(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $p \geq 1$. On considère la suite $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = g(x_n)$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ que l'on suppose convergente vers $\bar{x}$.

On suppose de plus qu'il existe $\kappa \in]0,1[$ tel que $x_{n+1} - \bar{x} = (\kappa + \epsilon_n)(x_n - \bar{x})$ avec $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Enfin, on définit $z_n = x_n - \dfrac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$.

1. Montrer que $z_n = x_n - \dfrac{(\kappa + \epsilon_n - 1)^2 (x_n - \bar{x})}{(\kappa + \epsilon_n)(\kappa + \epsilon_{n+1} - 2) + 1}$.

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{z_n - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} = 0$ (accélération de la convergence).

Exercice 4 :

Soit $\phi \in C^3(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. On approche l'intégrale $I = \displaystyle\int_t^{t+h} \phi(u)\,du$ par $Iapp = \displaystyle\int_t^{t+h} p(u)\,du$ où $p \in \mathbb{P}_2$ est le polynôme interpolant ϕ aux points $x_0 = t, x_1 = t-h, x_2 = t-2h$.

1. Déterminer $p(u)$ dans la base de Newton en fonction des valeurs de ϕ aux points $x_0 = t, x_1 = t-h, x_2 = t-2h$.

2. Majorer l'erreur $|\phi(u) - p(u)|$ en fonction de $t, t-h, t-2h$, u et $M_3 = max|\phi^{(3)}|$.

3. Montrer que $Iapp = \dfrac{h}{12}\big[5\phi(t-2h) - 16\phi(t-h) + 23\phi(t)\big]$.

4. Montrer que
$$|I - Iapp| \leq c_1 h^4 M_3 \tag{3}$$
en précisant c_1.

Exercice 5 :

Pour $I = [t_0, t_0+T] \subset \mathbb{R}$, soit $f \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui vérifie une condition de Lipschitz par rapport la seconde variable i.e. il existe $L \in \mathbb{R}$
$$\forall u, \bar{u} \in \mathbb{R},\, \forall x \in I, \quad |f(t,u) - f(t,\bar{u})| \leq L|u - \bar{u}|.$$

On considére le problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)),\, t \in I \\ y(t_0) &= \eta \end{cases} \tag{4}$$
qui admet une solution unique notée $y(t)$.

Pour approcher (4), le schéma numérique est défini sur une subdivision uniforme : $n \in \mathbb{N}$, $h = T/n$ et $t_i = t_0 + ih$ par
$$u_0 = \eta,\, v = u_0 + hf(t_0, u_0),\, u_2 = u_0 + 2hf(t_1, v),\, u_1 = u_0/4 + v/2 + u_2/4,$$
puis pour $i = 2, \ldots, n-1$,
$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{12}\big[5f(t_{i-2}, u_{i-2}) - 16f(t_{i-1}, u_{i-1}) + 23f(t_i, u_i)\big]. \tag{5}$$

1. Pour t et $t-2h$ dans I, soit
$$\epsilon(t,h) = y(t+h) - y(t) - \frac{h}{12}\big[5f(t-2h, y(t-2h)) - 16f(t-h, y(t-h)) + 23f(t, y(t))\big].$$
En utilisant des résultats de l'exercice précédent, majorer $|\epsilon(t,h)|$ pour déterminer l'ordre de la méthode.

2. On considère la suite (v_i) vérifiant le schéma perturbé tel que pour $2 \leq i \leq n-1$,

$$v_{i+1} = v_i + \frac{h}{12}\big[5f(t_{i-2}, v_{i-2}) - 16f(t_{i-1}, v_{i-1}) + 23f(t_i, v_i)\big] + \mu_i,$$

et on pose $\theta_i = \max\left(|u_i - v_i|, |u_{i-1} - v_{i-1}|, |u_{i-2} - v_{i-2}|\right)$.

Montrer que pour $i \geq 2$, $|u_{i+1} - v_{i+1}| \leq (1 + c_2 Lh)\ \theta_i + |\mu_i|$ en précisant c_2 et en déduire une majoration de θ_{i+1} en fonction de θ_i.

On rappelle le Lemme de Gronwall: *Soient (α_i) et (β_i) 2 suites de réels positifs vérifiant $\alpha_{i+1} \leq (1+hK)\alpha_i + \beta_i$ pour $i \geq 0$, alors*

$$\forall i \geq 0,\ \alpha_i \leq e^{K(t_i - t_0)}\alpha_0 + \sum_{k=0}^{i-1} e^{K(t_i - t_{k+1})}\beta_k.$$

3. Déduire une majoration de $|u_i - v_i|$ en fonction de $\theta_2 = \max_{i=0,1,2}|u_i - v_i|$ et $|\mu_2|, ..., |\mu_{i-1}|$ et des constantes du problème. En déduire que la méthode est stable.

4. On admet que $\max_{j=0,1,2}|y(t_j) - u_j| \leq c_3 h^3$. Déterminer une majoration de l'erreur $\max_{i=0,\dots,n}|y(t_i) - u_i|$.

5. *(bonus)* Montrer que $\max_{j=0,1,2}|y(t_j) - u_j| \leq c_3 h^3$ avec les étapes

$$\begin{aligned}
|y(t_1) - v| &\leq \frac{M_2}{2}h^2, && (6)\\
|y(t_2) - u_2| &\leq \left(\frac{M_3}{3} + LM_2\right)h^3, && (7)\\
|y(t_1) - u_1| &\leq \left(\frac{M_3}{12} + \frac{LM_2}{4}\right)h^3. && (8)
\end{aligned}$$

où $M_i = \max_{t\in I}|y^{(i)}(t)|$