4 ième année EII

Année universitaire 2018-2019
CONTRÔLE TP ANALYSE NUMÉRIQUE
Vendredi 7 janvier 2019 — durée : 2h

Exercice 1 : On considère l'équation différentielle

$$(P_1)\begin{cases} -u''(x)+c(x)u(x)=f(x) \text{ pour } 0\le x\le 1\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases} \tag{1}$$

où c et f sont des fonctions régulières. Si $c>0$, (P) admet une solution unique notée u.

Pour l'approximation, si $n\in\mathbb{N}^*$ et $h:=1/(n+1)$, on utilise une subdivision uniforme sur $[0,1]$: $x_i:=(i-1)h, i=1,\dots,n+2$ et on cherche une solution approchée $\bar{\boldsymbol{v}}:=[v_1,...,v_{n+2}]^T$ (notée `barV` avec MATLAB) de la solution exacte échantillonée $\bar{\boldsymbol{u}}:=[u(x_1),...,u(x_{n+2})]^T$ (notée `barU` avec MATLAB) aux points $\bar{\boldsymbol{x}}:=[x_1,...,x_{n+2}]^T$. Les valeurs initiales et finales sont connues $v_1=u(x_1)=0$ et $v_{n+2}=u(x_{n+2})=0$, donc il reste à trouver $\boldsymbol{v}:=[v_2,...,v_{n+1}]^T\in\mathbb{R}^n$ solution approchée aux point $\boldsymbol{x}:=[x_2,...,x_{n+1}]^T$.

En approchant $u''(x_i)$ par $\dfrac{u(x_{i-1})-2u(x_i)+u(x_{i+1})}{h^2}$, le problème approché est alors

$$(P_{h1}):\ \boldsymbol{A}_h\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{F} \text{ où } \boldsymbol{A}_h\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \boldsymbol{F}\in\mathbb{R}^n \tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_h:=\begin{bmatrix} 2+c(x_2)h^2 & -1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & 2+c(x_3)h^2 & -1 & 0 & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & 0 & -1 & 2+c(x_n)h^2 & -1\\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2+c(x_{n+1})h^2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}:=h^2\begin{bmatrix} f(x_2)\\ f(x_3)\\ \vdots\\ f(x_n)\\ f(x_{n+1})\end{bmatrix}.$$

Dans cet exercice, $c(x)=x+1$, $f(x)=(\pi^2+x+1)\sin(\pi x)$ et $u_1(x)=\sin(\pi x)$ est la solution de (P_1).

1. Pour n donné, écrire un programme script qui crée les vecteurs $\bar{\boldsymbol{x}}$ (noté `barX` en MATLAB) et $\boldsymbol{x}$. Sauvegarde `VI1.m` (VI sont vos initiales). Test avec $n=2$

```
>> VI1
n =
     2
barX =
         0
    0.3333
    0.6667
    1.0000
x =
    0.3333
    0.6667
```

2. Écrire 3 fonctions `f.m, c.m et u1.m`. (*À noter que* π *s'écrit* `pi` *en* MATLAB). Compléter le programme `VI1.m` en calculant $F=h^2f(x)$, $C=h^2c(x)$ et $barU=u1(\bar{x})$. Afficher $F^T, C^T, barU^T$. Sauvegarde `VI2.m`. Test avec $n=2$.

```
>> VI2
n =
     2
ans =
    1.0780    1.1101
ans =
    0.1481    0.1852
ans =
         0    0.8660    0.8660    0.0000
```

3. Compléter `VI2.m` avec la construction de $\boldsymbol{A}_h$ (*utiliser* `diag`) et le calcul de $\boldsymbol{v}$ solution de (P_{h1}). Afficher uniquement $\boldsymbol{A}_h$ et $\boldsymbol{v}$. Sauvegarde `VI3.m`. Test avec $n = 4$.

```
>> VI3
n =
     4
Ah =
    2.0480   -1.0000         0         0
   -1.0000    2.0560   -1.0000         0
         0   -1.0000    2.0640   -1.0000
         0         0   -1.0000    2.0720
v =
    0.6050
    0.9787
    0.9786
    0.6047
```

4. Compléter `VI3.m` avec le tracé de $\bar{v}$ et $\bar{u}$ et le calcul de l'erreur $err = \|\bar{u} - \bar{v}\|_\infty = \max_i |u(x_i) - v_i|$. Afficher uniquement err et le graphe. Sauvegarde `VI4.m`. Test avec $n = 4$.

5. Écrire un programme `VI5.m` pour étudier l'erreur en fonction de n à partir d'un tableau $arrn = 100 : 110$. Dessiner $\log(erreur)$ en fonction de $\log(n+1)$ et donner une estimation de l'ordre de la méthode en commentaire du programme.

Exercice 2 : Problème non linéaire Nous reprenons la même méthode numérique pour approcher la solution du problème non linéaire

$$(P_2) \begin{cases} u''(x) + \sin(u(x)) = g(x) \text{ for } x \in [0, 1] \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases}$$

Pour $\alpha := 1$ et $\beta := -1$, si $g(x) := \sin(\sin(\pi(x + 1/2))) - \pi^2 \sin(\pi(x + 1/2))$, alors la solution de (P_2) est $u_2(x) := \sin(\pi(x + 1/2))$.

Avec la subdivision et les notations précédentes, le problème approché s'écrit

$$(P_{h2}) : \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} = h^2(\boldsymbol{G} - \sin \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{D}$$

où

$$\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} -2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ \boldsymbol{G} := \begin{bmatrix} g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_k) \\ \vdots \\ g(x_{n+1}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{D} := \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

À nouveau $\boldsymbol{v} := [v_2, ..., v_{n+1}]^T$ est l'approximation de $\boldsymbol{u} := [u(x_2), \ldots, u(x_{n+1})]^T$ et $\bar{\boldsymbol{v}} := \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{v} \\ \beta \end{bmatrix}$ approche $\bar{\boldsymbol{u}} := \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{u} \\ \beta \end{bmatrix}$, la solution de (P_2) aux points de l'échantillonage.

L'équation dans (P_{h2}) n'est pas linéaire. Pour la résoudre, on utilise une méthode itérative débutant par $\boldsymbol{v}^0 := [0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$, puis pour $k = 0, 1, 2, \ldots$ on calcule de $\boldsymbol{v}^{k+1}$ en résolvant le système linéaire

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^{k+1} = h^2(\boldsymbol{G} - \sin \boldsymbol{v}^k) - \boldsymbol{D}. \tag{3}$$

On admet que la méthode converge et qu'avec suffisament d'itérations, le résultat est acceptable.

1. Écrire deux fichiers `function` `g.m` et `u2.m`. Test :

```
>> g([0.1  1])
ans =
   -8.5725      9.0281
>> u2([0.1  1])
ans =
    0.9511     -1.0000
```

2. Écrire un programme `VI6.m` qui calcule les vecteurs $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{D}$, la matrice $\boldsymbol{B}$ et la solution exacte $\bar{\boldsymbol{u}}$. Test avec $n = 3$ Afficher $\boldsymbol{G}^T$, $\boldsymbol{D}^T$ and $barU^T$.

3. Compléter `VI6.m` en appliquant p itérations dans (3). À chaque étape k, $\boldsymbol{v}^1$ est calculé comme solution de $\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}^1 = h^2(\boldsymbol{G} - \sin \boldsymbol{v}^0) - \boldsymbol{D}$, on calcule ensuite l'erreur $erriter(k) = \|\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^0\|_\infty$, enfin, on met à jour $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}^1$. La solution $\boldsymbol{v}$ est le dernier $\boldsymbol{v}^1$ calculé. Afficher $\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \boldsymbol{v} \\ \beta \end{bmatrix}$ et $erriter(4:5)$. Sauvegarde `VI7.m`. Test avec $p = 6$ et les données précédentes.

4. Ajouter au programme précédent les graphes des solutions des problèmes exactes et approchés et le calcul de l'erreur $\|\bar{\boldsymbol{u}} - \bar{\boldsymbol{v}}\|_\infty$. Sauvegarde `VI8.m`. Test avec les données précédentes.

5. Écrire un programme `VI9.m` pour étudier l'erreur en fonction de n à partir d'un tableau $\boldsymbol{n} = 100 : 10 : 200$. Donner une estimation de l'ordre de la méthode. Test avec les données précédentes et le nombre d'itérations $p = 2n$.